



جمهورية العراق  
وزارة التربية  
المديرية العامة للمناهج

سلسلة كتب الرياضيات للمرحلة المتوسطة

# الرياضيات

للفيف الثالث المتوسط

## المؤلفون

|                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| د. أمير عبد المجيد جاسم | د. طارق شعبان رجب       |
| د. سمير قاسم حسن        | د. منير عبد الخالق عزيز |
| حسين صادق كاظم          | زينة عبد الامير حسين    |

تنقيح لجنة متخصصة في وزارة التربية

بُنِيَتْ وَصُمِّمَتْ (سلسلةُ كُتُبِ الرِّياضِيَّاتِ للمرحلةِ المتوسطةِ) على أيدي فريقٍ من المتخصّصين في وزارةِ التَّربيةِ /المديريةِ العامَّةِ للمناهجِ وبِمشاركةٍ متخصّصينَ من أساتذةِ الجامعاتِ في وزارةِ التَّعليمِ العاليِ والبحثِ العلميِّ على وفق المعاييرِ العالميةِ لِتُحقِّقَ أهدافَ بناءِ المنهجِ الحديثِ المتمثِّلَةِ في جعلِ الطُّلابِ :

- مُتعلِّمينَ ناجحينَ مدى الحياة.
- أفراداً واثقينَ بأنفسِهِم.
- مواطنينَ عراقيينَ يشعُرونَ بالفخر.

المشرفُ الفنيُّ على الطَّبع  
ياسر منذر محمد سعيد حبه

المشرفُ العلميُّ على الطَّبع  
عبد الله عمر هندي



الموقع والصفحة الرسمية للمديرية العامة للمناهج

[www.manahj.edu.iq](http://www.manahj.edu.iq)

[manahjb@yahoo.com](mailto:manahjb@yahoo.com)

[Info@manahj.edu.iq](mailto:Info@manahj.edu.iq)



f manahjb

manahj

استناداً إلى القانون يوزع مجاناً ويمنع بيعه وتداوله في الاسواق



## المقدمة

تُعَدُّ مادةُ الرياضياتِ مِنْ الموادِ الدراسيةِ الأساسيةِ التي تُساعدُ الطالبَ على اكتسابِ الكفاياتِ التعليميةِ اللازمةِ لَهُ، لتنميةِ قُدراتِهِ على التفكيرِ وَحَلِّ المشكلاتِ، ويساعدهُ على التعاملِ مع المواقفِ الحياتيةِ المختلفةِ.

وَمِنْ مُنطَلَقِ الاهتمامِ الذي تُوليه وزارةُ التربيةِ متمثلةً بالمديريةِ العامةِ للمناهجِ لتطويرِ المناهجِ بصورةٍ عامةٍ ولاسيماَ مناهجِ الرياضياتِ لكي تواكبَ التطوراتِ العلميةَ والتكنولوجيةَ في مجالاتِ الحياةِ المختلفةِ، فَقَدْ وُضِعَت خطةٌ لتأليفِ سلسلةِ كُتبِ الرياضياتِ للمراحلِ الدراسيةِ الثلاثِ، وأنجزتْ منها كتبُ المرحلةِ الابتدائيةِ وَبَدَأَ العملُ على استكمالِ السلسلةِ بتأليفِ كتبِ المرحلةِ المتوسطةِ.

إنَّ سلسلةَ كُتبِ الرياضياتِ العراقيةِ الجديدةِ ومن ضمنِ الإطارِ العامِ للمناهجِ تُعزِزُ القيمَ الأساسيةَ التي تتمثلُ بالالتزامِ بالهويةِ العراقيةِ والتسامحِ واحترامِ الرأيِ والرأيِ الآخرِ والعدالةِ الاجتماعيةِ، وتوفيرِ فرصِ متكافئةٍ للتمييزِ والإبداعِ، كما تعملُ على تعزيزِ كفاياتِ التفكيرِ والتعلُّمِ والكفاياتِ الشخصيةِ والاجتماعيةِ وكفاياتِ المواطنةِ والعملِ.

بُنيتْ سلسلةُ كُتبِ الرياضياتِ العراقيةِ على محورِيةِ الطالبِ في عمليتيِ التعلُّمِ والتعلُّمِ وَعدَهُ المحورَ الرئيسَ في العمليةِ التربويةِ على وفقِ المعاييرِ العالميةِ.

تميزتْ سلسلةُ كُتبِ الرياضياتِ العراقيةِ للمرحلةِ المتوسطةِ في تنظيمِ الدروسِ على ستِ فقراتٍ: تَعَلَّمَ ، تَأَكَّدْ مِنْ فَهْمِكَ ، تَدَرَّبْ وَحَلِّ التمريناتِ، تَدَرَّبْ وَحَلِّ مسائلَ حياتيةً ، فَكَّرْ ، أَكْتُبْ. يأتي كتابُ الرياضياتِ للصفِ الثالثِ المتوسطِ مشتملاً على أربعةِ محاورٍ أساسيةٍ: محورُ الأعدادِ والعملياتِ ، ومحورُ الجبرِ، ومحورُ الهندسةِ والقياسِ ، ومحورُ الإحصاءِ والاحتمالاتِ من ضمنِ الأوزانِ النسبيةِ لكلِ محورٍ، وتضمَّنَ الكتابُ ستةَ فصولٍ ولكلِّ فصلٍ تمريناته.

تتميزُ هذهِ الكتبُ بأنها تعرضُ المادةَ بأساليبٍ حديثةٍ، تتوفرُ فيها عناصرُ الجذبِ والتشويقِ، التي تُساعدُ الطالبَ على التفاعلِ معها، عن طريقِ ما تُقدِّمه من تدريباتٍ وتمريناتٍ ومسائلَ حياتيةٍ، إضافةً إلى ذلكِ وَضِعَت تمريناتُ الفصولِ في نهايةِ الكتابِ وهي تختلفُ عن التدريباتِ والتمريناتِ في الدروسِ وذلكِ لكونها موضوعيةً فالإجابة عنها تكون عن طريقِ اختيارٍ من متعددٍ وهذا بدوره يهيئُ الطالبَ للمشاركةِ في المسابقاتِ الدوليةِ.

يمثلُ هذا الكتابُ امتداداً لسلسلةِ كُتبِ الرياضياتِ المطوَّرةِ للمرحلةِ الابتدائيةِ ودعامةً من دعائمِ المنهجِ المطوَّرِ في الرياضياتِ إلى جانبِ دليلِ المدرِّسِ، وعليه نأملُ أن يُسَهِّمَ تنفيذُها في اكتسابِ الطَّلابِ المهاراتِ العلميةِ والعمليةِ وتنميةِ ميولهم لدراسةِ الرياضياتِ.

اللَّهُمَّ وَفَّقْنَا لخدمةِ عراقنا العزيزِ وأبنائه ...

المؤلفون



# العلاقات والمتباينات في الأعداد الحقيقية

## Relations and Inequalities in Real Numbers

الدرس 1-1 ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية

الدرس 1-2 التطبيقات

الدرس 1-3 المتباينات المركبة

الدرس 1-4 متباينات القيمة المطلقة

تتحرك موجة التسونامي في البحار العميقة بسرعة فائقة، لكنها حين تصل إلى الشاطئ تزداد سرعتها تحت تأثير طاقتها الهائلة وتضرب الشاطئ بقوة مخلفة دمار شامل. ويمكن حساب سرعة التسونامي بالقانون  $v = \sqrt{9.6d}$  متر في الثانية، حيث  $d$  تمثل عمق الماء بالمتر.



صنّف العدد من حيث كونه عدداً نسبياً أو غير نسبي:

1  $\sqrt{25}$

2  $\sqrt{7}$

3  $\frac{0}{\sqrt{3}}$

4  $\sqrt{\frac{16}{25}}$

5  $\sqrt{\frac{49}{5}}$

6  $\frac{30}{4}$

7  $-6\frac{3}{2}$

8  $-\sqrt{8}$

قدّر الجذور التربيعية التالية بالتقريب لأقرب عُشر، ثم مثلها على مستقيم الأعداد:

9  $\sqrt{2} \approx \dots$

10  $-\sqrt{3} \approx \dots$

11  $\sqrt{\frac{6}{25}} \approx \dots$

12  $\sqrt{\frac{81}{49}} \approx \dots$

قارن بين الأعداد الحقيقية مستعملاً الرموز ( $=$ ،  $>$ ،  $<$ ):

13  $\sqrt{5} \boxed{\phantom{00}} 2\frac{1}{3}$

14  $1.25 \boxed{\phantom{00}} \sqrt{2.25}$

15  $\sqrt{\frac{0}{3}} \boxed{\phantom{00}} \frac{0}{6}$

16  $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \boxed{\phantom{00}} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$

17 رتّب الأعداد من الأصغر إلى الأكبر:  $\sqrt{7}$ ،  $2.25$ ،  $\sqrt{5}$

18 رتّب الأعداد من الأكبر إلى الأصغر:  $-3.33$ ،  $-\frac{7}{3}$ ،  $-\frac{1}{5}$

حلّ المتباينات التالية في  $R$  باستعمال خواص المتباينات على الأعداد الحقيقية:

19  $3x + \frac{2}{5} \geq 4x - \frac{3}{5}$

20  $\frac{3}{7} > z - \frac{9}{14}$

21  $\frac{3y}{8} \geq \frac{2}{7}$

22  $\frac{-4m}{11} < \frac{9}{22}$

23  $6(z - 3) > 5(z + 1)$

24  $4\left(\frac{1}{2}v + \frac{3}{8}\right) > 0$

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية:

25  $\sqrt{2}(1 - \sqrt{18}) = \dots$

26  $3\sqrt{12} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \dots$

27  $\frac{\sqrt{7} - 8\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} = \dots$

28  $\frac{6\sqrt{44}}{\sqrt{5}} \div \frac{18\sqrt{11}}{\sqrt{5}}$



## تعلم

يُعد زلزال تسونامي الذي حدث في اليابان عام 2011 من أقوى الزلازل التي حدثت على مرّ العصور. وتحسب سرعة التسونامي بالقانون  $v = \sqrt{9.6d}$  متر بالثانية، حيث  $d$  تمثل عمق المياه. ما سرعة التسونامي التقريبية إذا كان عمق المياه 1000 متر؟

## فكرة الدرس

• تبسيط الجمل العددية التي تحتوي على أعداد حقيقية باستعمال ترتيب العمليات.

## المفردات

• العدد الحقيقي  
• تنسيب (تجذير) المقام.  
• المرافق

## [1-1-1] استعمال ترتيب العمليات لتبسيط جمل عددية

## Using ordering operations to simplify the numerical sentences

تعرفت سابقاً إلى الأعداد الطبيعية والكلية والصحيحة والنسبية والحقيقية، ويمكن إدراجها بالترتيب الآتي:  $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$ ، وكذلك تعلمت كيفية تبسيط جمل عددية باستعمال ترتيب العمليات على هذه الأعداد، وسوف تزيد مهارتك في تبسيط الجمل العددية التي تحتوي على أعداد حقيقية مختلفة فيها جذور حقيقية وجذور مربعات كاملة وكذلك كسور تحتوي على جذور بتطبيق الخواص عليها مع استعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية وكذلك استعمال تنسيب المقام لتبسيط العبارات وذلك من خلال ضرب مقام الكسر وبسطه بالعامل المنسب (المرافق) (العدد  $2 - \sqrt{3}$  هو العامل المنسب (المرافق) للعدد  $2 + \sqrt{3}$  لأن حاصل ضربهما عدد نسبي).

## مثال (1)

جد سرعة التسونامي التقريبية إذا كان عمق المياه 1000 متر.

$$v = \sqrt{9.6d}$$

قانون حساب سرعة التسونامي حيث  $d$  تمثل عمق المياه

$$= \sqrt{9.6 \times 1000} = \sqrt{9600} \approx 98 \text{ m/sec}$$

سرعة التسونامي التقريبية

## مثال (2)

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية:

باستعمال التوزيع

$$i) (\sqrt{12} - \sqrt{18})(\sqrt{12} + \sqrt{18}) = (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})$$

$$= 2\sqrt{3}(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) - 3\sqrt{2}(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) = 12 + 6\sqrt{6} - 6\sqrt{6} - 18 = -6$$

$$ii) (\sqrt[3]{\frac{8}{27}} - \sqrt{\frac{2}{3}}) \div (\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{27}}) = (\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{2}{3}}) \div (\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}) = \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \frac{-3\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} = -1$$

## مثال (3)

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية واكتب الناتج لأقرب عُشر:

$$i) \sqrt{12}(\sqrt{3} - \sqrt{8}) - 6 = 2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) - 6 = 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} - 6$$

$$= 6 - 4\sqrt{3 \times 2} - 6 = -4\sqrt{6} \approx -4 \times 2.4 = -9.8$$

$$ii) (-27)^{\frac{1}{3}}(\frac{1}{9}\sqrt{7} - \frac{1}{9}\sqrt{28}) = \sqrt[3]{-27}(\frac{1}{9}\sqrt{7} - \frac{2}{9}\sqrt{7}) = -3(\frac{1}{9}\sqrt{7} - \frac{2}{9}\sqrt{7})$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{7} + \frac{2}{3}\sqrt{7} = \frac{1}{3}\sqrt{7} \approx 0.9$$

ملاحظة:  $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$



**مثال (4)** بسّط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية:

$$i) \frac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times 1 = \frac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(7-\sqrt{5})}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5} - \sqrt{5}\sqrt{5}}{5} = \frac{7\sqrt{5} - 5}{5}$$

$$ii) \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}} \times \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2\sqrt{3}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{7}(2\sqrt{3}+\sqrt{7})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{7})(2\sqrt{3}+\sqrt{7})}$$

الضرب بالمرافق

$$= \frac{6\sqrt{7} + 7\sqrt{3}}{12 - 7} = \frac{6\sqrt{7} + 7\sqrt{3}}{5}$$

المقام فرق بين مربعين

**[1-2-1] استعمال الحاسبة والتقريب لتبسيط جمل عددية**

**Using calculator and approximation to simplify the numerical sentences**

تعلمت سابقاً كيفية تبسيط جمل عددية تحتوي على قوى (أسس) سالبة صحيحة للعدد وصورة علمية للعدد باستعمال الحاسبة، والآن سوف تزيد مهارتك بتبسيط الجمل العددية التي تحتوي على أعداد مرفوعة إلى قوى (أسس) نسبية إضافة إلى الأعداد الصحيحة مستعملاً الحاسبة لكتابة الناتج مقرباً.

**مثال (5)** احسب الأسس لكل مما يلي واكتب الناتج مقرباً إلى مرتبتين عشريتين إذا لم يكن عدداً صحيحاً:

$$i) 9^{-\frac{3}{2}} = (3^2)^{-\frac{3}{2}} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \approx 0.04$$

$$ii) (\sqrt{7})^2 = (7^{\frac{1}{2}})^2 = 7$$

$$iii) 2^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{10+2-9}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1.41$$

$$iv) 5^2 \div 5^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{4}{2}-\frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \approx 2.24$$

استعمل ترتيب العمليات واكتب الناتج مقرباً إلى مرتبتين عشريتين مستعملاً الحاسبة لكل مما يأتي:

$$v) (\frac{1}{2})^2 + 3^{-2} - 2^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \sqrt{2^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \sqrt{8} \approx 0.25 + 0.11 - 2.83 = -2.47$$

$$iv) 8^{\frac{1}{3}} - (-8)^0 + 3^2 \times 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{8} - 1 + 3^{\frac{5}{2}} = \sqrt[3]{8} - 1 + \sqrt{3^5} \approx 2 - 1 + 9 \times 1.73 = 16.57$$

**مثال (6)** استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقرباً لأقرب مرتبتين عشريتين:

$$i) 7.6 \times 10^{-4} - 0.4135 \times 10^{-3} = 7.6 \times 10^{-4} - 4.135 \times 10^{-4} = 3.465 \times 10^{-4} \approx 3.47 \times 10^{-4}$$

$$ii) 0.052 \times 10^4 + 7.13 \times 10^2 = 5.2 \times 10^2 + 7.13 \times 10^2 = 12.33 \times 10^2 \approx 1.23 \times 10^3$$

$$iii) (7.83 \times 10^{-5})^2 = (7.83 \times 10^{-5})(7.83 \times 10^{-5}) = 61.3089 \times 10^{-10} \approx 6.13 \times 10^{-9}$$

$$iv) 4.86 \times 10^2 \div 0.55 \times 10^5 = (4.86 \div 0.55) \times 10^2 \times 10^{-5} \approx 8.84 \times 10^{-3}$$

## تأكّد من فهمك

بسّط الجمل العددية الآتية:

الأسئلة (1 - 4)

$$1 \quad (\sqrt{5} - \sqrt{3}) (\sqrt{5} + \sqrt{3}) = \dots\dots \quad 2 \quad (\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 = \dots\dots$$

مشابهة للمثال (2)

$$3 \quad (\sqrt{125} - \sqrt{20}) \left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right) = \dots\dots \quad 4 \quad \frac{4\sqrt{12}}{5\sqrt[3]{-27}} \div \frac{2\sqrt{24}}{\sqrt{8}} = \dots\dots$$

بسّط الجمل العددية التالية واكتب الناتج لأقرب عُشر:

الأسئلة (5 - 6)

$$5 \quad \sqrt{7}(\sqrt{28} - \sqrt{2}) - 5 \approx \dots\dots \quad 6 \quad (-125)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{10}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\sqrt{12}\right) \approx \dots\dots$$

مشابهة للمثال (3)

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد:

الأسئلة (7 - 9)

$$7 \quad \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \dots\dots \quad 8 \quad \frac{1-\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \dots\dots \quad 9 \quad \frac{\sqrt{50}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{10-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \dots\dots$$

مشابهة للمثال (4)

استعمل ترتيب العمليات واكتب الناتج مقرباً إلى مرتبتين عشريتين مستعملاً الحاسبة لكل مما يأتي:

الأسئلة (10 - 11)

$$10 \quad \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3^{-3} - 3^{\frac{3}{2}} \approx \dots\dots \quad 11 \quad 27^{\frac{1}{3}} - (-9)^0 + 3^2 \times 5^{\frac{1}{2}} \approx \dots\dots$$

مشابهة للمثال (5)

استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقرباً لأقرب مرتبتين عشريتين:

الأسئلة (12 - 13)

$$12 \quad 6.43 \times 10^{-5} - 0.25 \times 10^{-3} \approx \dots\dots \quad 13 \quad (9.23 \times 10^{-3})^2 \approx \dots\dots$$

مشابهة للمثال (6)

## تدرب وحلّ التمرينات

بسّط الجمل العددية الآتية:

$$14 \quad (\sqrt{18} - \sqrt{50}) \left(\frac{-27}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = \dots\dots \quad 15 \quad \frac{\sqrt{12}}{3\sqrt[3]{125}} \div \frac{5\sqrt[3]{8}}{\sqrt{25}} = \dots\dots$$

بسّط الجملة العددية التالية واكتب الناتج لأقرب عُشر:

$$16 \quad 7\sqrt{\frac{2}{49}} - 3\sqrt{\frac{8}{81}} + \sqrt{\frac{18}{36}} \approx \dots\dots$$

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد:

$$17 \quad \frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}+3\sqrt{5}} = \dots\dots \quad 18 \quad \frac{\sqrt{33}-\sqrt{11}}{\sqrt{99}} - \frac{\sqrt{60}-\sqrt{5}}{5\sqrt{15}} = \dots\dots$$



## تدرب وحل مسائل حياتية



19 **الأقمار الاصطناعية:** يستعمل القمر الصناعي بصفة أساسية في الاتصالات مثل إشارات التلفاز والمكالمات الهاتفية في جميع أنحاء العالم والتنبؤ بالطقس وتعقب الأعاصير، إذ تدور هذه الأقمار بسرعات محددة في مدارات خاصة بها حول الأرض، وتحسب سرعة القمر المدارية بالعلاقة التالية:  $v = \sqrt{\frac{4 \times 10^{14}}{r}}$  m/sec، إذ  $r$  نصف قطر المدار (بُعد القمر عن مركز الأرض). ما سرعة القمر إذا كان نصف قطر المدار 300km ؟



20 **مكافحة الحرائق:** تحسب سرعة تدفق الماء الذي يضخ من سيارات الحريق بالقانون  $v = \sqrt{2hg}$  foot/sec، إذ  $h$  تمثل أقصى ارتفاع للماء و  $g$  يمثل التعجيل الأرضي ( $32 \text{ foot/sec}^2$ ). لإطفاء الحريق في الغابات تحتاج إدارة مكافحة الحرائق في الدفاع المدني إلى مضخة لتضخ الماء إلى ارتفاع 80 foot. فهل تفي بحاجتها مضخة تقذف الماء بسرعة 72 foot/sec ؟

1 foot = 30 cm  
وحدة قياس بالنظام الفرنسي



21 **هندسة:** جد مساحة المثلث الذي يعلو واجهة البيت إذا كان ارتفاعه  $\sqrt{18} - \sqrt{3} \text{ m}$  وطول قاعدته  $3\sqrt{2} + \sqrt{3} \text{ m}$ .

## فكر

22 **تحذ:** أثبت صحة ما يأتي:

$$(7^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{1}{3}}) (7^{\frac{2}{3}} + 7^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{1}{3}} + 5^{\frac{2}{3}}) = 2$$

23 **أصح الخطأ:** كتب شاكر ناتج جمع العددين كالاتي:

$$8.4 \times 10^{-3} + 0.52 \times 10^{-2} = 1.36 \times 10^{-3}$$

حدّد خطأ شاكر وصحّحه.

24 **حسّ عددي:** هل أن العدد  $\sqrt{125}$  يقع بين العددين 10.28 و 11.28 ؟

## أكتب

ناتج الجمع بالتقريب لأقرب عُشر:

$$6^{\frac{3}{2}} + 5^{\frac{3}{2}} \approx \dots$$





## تعلم

مجموعة  $X$  تمثل بعض المناطق الأثرية في العراق {باب عشتار، أور، الحضر}  $X =$   
ولتكن المجموعة  $Y$  تمثل بعض المدن العراقية  
 $Y = \{\text{بغداد، الحلة، الناصرية، الموصل، أربيل}\}$   
العلاقة  $R: X \rightarrow Y$  التي تمثل اقتران كل منطقة أثرية إلى المدينة التي تقع فيها:  
 $R = \{(\text{الناصرية، أور}), (\text{الموصل، الحضر})\}$   
 $\{(\text{بابل، باب عشتار})\}$  تسمى تطبيق مجاله  $X$   
ومجاله المقابل  $Y$ .

## فكرة الدرس

• تعرف التطبيق وأنواعه  
• كيفية تمثيله بيانياً في  
المستوي الإحداثي وتعرف  
تركيب التطبيقات.

## المفردات

• العلاقة  
• الزوج المرتب  
• الضرب الديكارتي  
• التطبيق  
• المجال والمجال المقابل  
والمدى  
• تركيب التطبيقات

## [1-2-1] التطبيق وتمثيله في المستوي الإحداثي

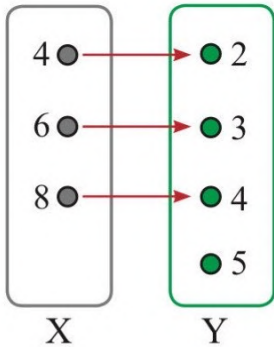
## Mapping and its representation in the coordinate plane

تعرفت سابقاً إلى العلاقة من المجموعة  $X$  إلى المجموعة  $Y$  وهي المجموعة الجزئية (مجموعة من الأزواج المرتبة  $(x,y)$  إذ ينتمي المسقط الأول «الأحداثي الأول» إلى المجموعة  $X$  والمسقط الثاني «الإحداثي الثاني» إلى المجموعة  $Y$ ) من حاصل الضرب الديكارتي  $X \times Y$  الذي يمثل مجموعة كل الأزواج المرتبة، وسوف نتعرف على التطبيق  $R: X \rightarrow Y$  وكيفية تمثيله بمخطط سهمي وتمثيله بالمستوي (بيانياً) والتعرف على أنواعه.

التطبيق: لتكن  $R$  علاقة من المجموعة  $X$  إلى المجموعة  $Y$  وكان لكل عنصر في  $X$  صورة واحدة في  $Y$  عندئذ تسمى العلاقة  $R$  تطبيق من  $X$  إلى  $Y$ ،  $R: X \rightarrow Y$  وتسمى المجموعة  $X$  بمجال التطبيق (Domain)، والمجموعة  $Y$  بالمجال المقابل للتطبيق (Co-domain)، ويسمى كل عنصر في  $Y$  مرتبط بعنصر من  $X$  صورة لذلك العنصر، وتسمى مجموعة كل الصور في المجال المقابل بالمدى (Range)، وتسمى القاعدة التي تنقل العنصر إلى صورته بقاعدة الاقتران (قاعدة التطبيق) ويرمز لها  $(x,y)$ ،  $R(x)$ .

## مثال (1)

إذا كانت  $R: X \rightarrow Y$  تمثل تطبيقاً بقاعدة اقتران  $(y = \frac{1}{2}x)$  من المجموعة  $X = \{4,6,8\}$  إلى المجموعة  $Y = \{2,3,4,5\}$ . اكتب التطبيق على شكل مجموعة أزواج مرتبة ثم مثل التطبيق بمخطط سهمي، وحدد المجال والمدى للتطبيق.



يوضح المخطط السهمي علاقة ارتباط عناصر المجموعتين

ضمن قاعدة الاقتران  $y = R(x) = \frac{1}{2}x$  أي:

$$4 \rightarrow 2, 6 \rightarrow 3, 8 \rightarrow 4$$

ولذا مجموعة التطبيق  $R = \{(4,2), (6,3), (8,4)\}$

المجال: وهو مجموعة المساقط الأولى من الأزواج المرتبة في  $R$

وهو المجموعة  $\{4,6,8\}$

المدى: وهو مجموعة المساقط الثانية من الأزواج المرتبة في  $R$ ، وهو المجموعة  $\{2,3,4\}$

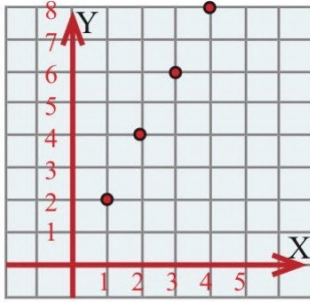
**ملاحظة:** المدى هو مجموعة جزئية من المجال المقابل للتطبيق

نلاحظ هنا المدى  $\neq$  المجال المقابل



## مثال (2)

الجدول التالي يمثل العلاقة بين الوزن (كغم) وسعر السمك  $(f(x) = y)$ .



| الوزن/كغم X | السعر بالآلاف الدنانير Y |
|-------------|--------------------------|
| 1           | 2                        |
| 2           | 4                        |
| 3           | 6                        |
| 4           | 8                        |

هل تمثل العلاقة تطبيقاً ؟

إذا كانت تطبيقاً فاكتب قاعدة الاقتران وحدد المجال والمدى ومثله بالمستوي.

قاعدة الاقتران  $y = 2x$

المجال  $\{1, 2, 3, 4\}$  , المدى  $\{2, 4, 6, 8\}$

## [1-2-2] أنواع التطبيقات

### The kind of mappings

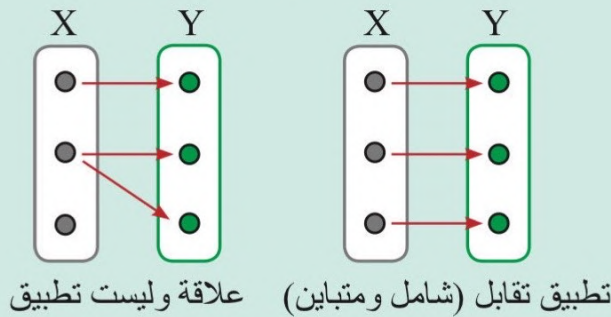
يكون التطبيق  $f: X \rightarrow Y$  :

(ii) التطبيق المتباين Injective mapping

$$\forall x_1, x_2 \in X; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

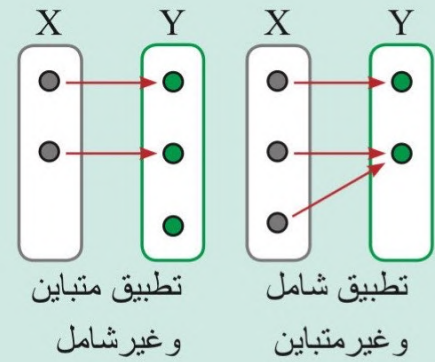
(iii) التطبيق تقابل (Bijjective mapping)

إذا كان التطبيق شامل ومتباين في آن واحد.



(i) التطبيق شامل Surjective mapping

إذا كان المدى = المجال المقابل.



## مثال (3)

إذا كانت  $f: Z \rightarrow Z$  حيث  $f(x) = 2x^2 - 3$  ، بين نوع التطبيق حيث  $Z$  مجموعة الأعداد الصحيحة.

$$f(x) = 2x^2 - 3, f(-2) = 5, f(-1) = -1, f(0) = -3, f(1) = -1, f(2) = 5$$

..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

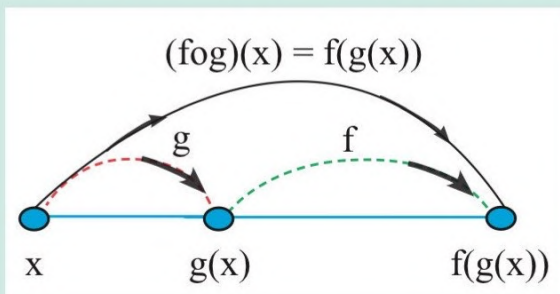
أولاً: التطبيق ليس شاملاً لأن المدى لا يساوي المجال المقابل.

ثانياً: ليس متبايناً لأن  $f(-1) = f(1) = -1$  بينما  $-1 \neq 1$ .

..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

## [1-2-3] تركيب التطبيقات

### The composition of mappings



ندرس طريقة لإيجاد تطبيق جديد من تطبيقين معلومين إذ هما  $f(x)$  و  $g(x)$  وهي:

(i) التطبيق  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  ويُقرأ  $f$  تركيب  $g$  (بعد  $f$ ) وهو ناتج إيجاد  $g(x)$  أولاً ثم إيجاد صورته في التطبيق  $f$ .

(ii) التطبيق  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  ويُقرأ  $g$  تركيب  $f$  وهو ناتج إيجاد  $f(x)$  أولاً ثم إيجاد صورته في التطبيق  $g$ .

#### مثال (4)

إذا كان  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ،  $g(x) = x^2$  ،  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ،  $f(x) = 2x + 1$  .

جد: (i)  $(f \circ g)(3)$  ، (ii)  $(g \circ f)(3)$  ، ماذا تلاحظ؟ ، (iii) جد قيمة  $x$  إذا كان  $(f \circ g)(x) = 33$ .

i)  $(f \circ g)(3)$  نجد

$$\begin{aligned}(f \circ g)(3) &= f(g(3)) = f(3^2) \\ &= f(9) = 2 \times 9 + 1 \\ &= 19\end{aligned}$$

ii)  $(g \circ f)(3)$  نجد

$$\begin{aligned}(g \circ f)(3) &= g(f(3)) \\ &= g(2 \times 3 + 1) \\ &= g(7) = 7^2 = 49\end{aligned}$$

لاحظ أن  $(f \circ g)(3) \neq (g \circ f)(3)$

iii)  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$

$$2x^2 + 1 = 33 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \text{ or } x = -4 \notin \mathbb{N} \text{ يهمل}$$

#### تأكد من فهمك

اكتب قاعدة اقتران للتطبيق ومثله بمخطط سهمي واكتب المجال والمدى له:

1  $f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$  2  $g = \{(1,3), (2,5), (3,7), (4,9)\}$

الأسئلة (2 - 1)  
مشابهة للمثال (1)

اكتب قاعدة الاقتران للتطبيقات التالية ومثلها في المستوي الإحداثي واكتب المجال والمدى لها:

3  $f = \{(1,0), (2,0), (3,0), (4,0)\}$  4  $g = \{(0,0), (1,-1), (2,-2), (3,-3)\}$

الأسئلة (4 - 3)  
مشابهة للمثال (2)

السؤال (5)  
مشابهة للمثال (3) 5 إذا كان التطبيق  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  إذ إن  $f(x) = 3x + 2$  . بيّن هل أن التطبيق شامل أم لا؟

6 ليكن التطبيقان  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  حيث  $f(x) = 3x + 1$  وإن  $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  حيث  $g(x) = 2x + 5$  .

الأسئلة (7 - 6)  
مشابهة للمثال (4) جد قيمة  $x$  إذا كان  $(f \circ g)(x) = 28$  .

7 إذا كانت  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  حيث  $f(x) = 5x + 2$  وإن  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  إذ  $g(x) = x + 3$  .

اكتب التطبيق  $f \circ g$  بكتابة الأزواج المرتبة له.

#### تدرب وحل التمرينات

8 إذا كان  $A = \{1,2,3\}$  و  $B = \{4,5,6\}$  وإن  $f: A \rightarrow B$  معرّف كالاتي:

$f = \{(1,4), (2,5), (3,6)\}$  ، ارسم المخطط السهمي للتطبيق ومثله بالمستوي الإحداثي.

9 إذا كان  $f: A \rightarrow \mathbb{Z}$  حيث  $f(x) = x^2$  والمجموعة  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  ، مثل التطبيق في المستوي

الإحداثي وبيّن هل أنه تطبيق متباين أم لا ؟

10 ليكن  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  إذ إن  $f(x) = x^2$  ،  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  إذ  $g(x) = x + 1$  . والمطلوب إيجاد:

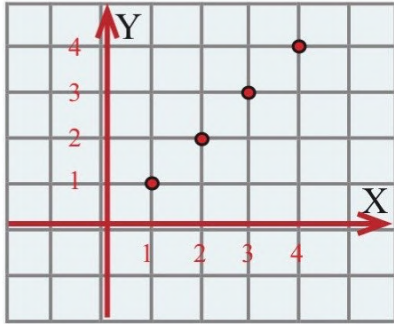
i)  $(g \circ f)(x)$  ،  $(f \circ g)(x)$  ، ii)  $(f \circ g)(2)$  ،  $(g \circ f)(2)$



## تدرب وحل مسائل حياتية



- 11 **درجات الحرارة:** سجلت درجات الحرارة في أحد أيام الشتاء بالعلاقة التالية  $R = \{(6, -2), (9, -3), (12, -4), (15, -5)\}$  إذ يمثل الإحداثي الأول الوقت بالساعة والإحداثي الثاني درجة الحرارة بالدرجات السيليزية. مثل العلاقة بجدول ومثلها بالمستوي الإحداثي، هل تمثل العلاقة تطبيقاً أم لا؟ مِعلاً إجابتك.



- 12 **المستوي الإحداثي:** الشكل البياني المجاور يمثل التطبيق  $f: N \rightarrow N$ . اكتب إحداثيات الأزواج المرتبة التي تمثلها نقاط التطبيق في البياني، اكتب قاعدة اقتران التطبيق، هل التطبيق متباين أم لا؟



- 13 **صحة:** العلاقة  $W_r = 2\left(\frac{W_b}{3}\right)$  تمثل وزن الماء في جسم الإنسان، و  $W_b$  تمثل وزن الإنسان. وزن حسان 150kg، استعمل نظام خاص بإنقاص الوزن لمدة ثلاثة أشهر ففقد من وزنه 6kg في الشهر الأول ثم 12kg في الشهر الثاني، 12kg في الشهر الثالث. اكتب جميع الأزواج المرتبة للعلاقة بين وزن حسان ووزن الماء في جسمه، هل تمثل تطبيقاً أم لا ؟

## فكر

- 14 **تحذ:** إذا كان  $A = \{1, 2, 3\}$  وكان  $f: A \rightarrow A$  و  $g: A \rightarrow A$  معرفان كما يلي:  
 $f = \{(1, 3), (3, 3), (2, 3)\}$  ،  $g = \{(3, 1), (1, 2), (2, 3)\}$   
 بين هل أن  $g \circ f = f \circ g$  ؟
- 15 **أصح الخطأ:** قال ياسين إن العلاقة  $f: Z \rightarrow Z$  حيث  $f(x) = x^3$  لا تمثل تطبيقاً متبايناً. حدّد خطأ ياسين وصحّحه.
- 16 **حسّ عددي:** حدّد ما إذا كانت كل علاقة  $f: X \rightarrow Y$  فيما يلي تمثل تطبيقاً أم لا؟ فسّر ذلك.

|   |   |   |   |   |    |
|---|---|---|---|---|----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  |
| y | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |

## أكتب

قيمة  $x$  إذا كان  $f: N \rightarrow N$  يمثل تطبيقاً حيث  $f(x) = 4x - 3$  ، وأن  $(f \circ f)(x) = 33$ .



## Compound Inequalities



### تعلم

تقاس درجات حرارة الجو خلال اليوم الواحد بدرجة الحرارة السيليزية الصغرى والكبرى لكونها متغيرة من وقت لآخر. فإذا كانت درجة الحرارة السيليزية الصغرى في مدينة بغداد في شهر كانون الأول  $8^{\circ}\text{C}$  ودرجة الحرارة السيليزية الكبرى  $15^{\circ}\text{C}$ . اكتب متباينة تمثل درجة الحرارة في بغداد وجد حلّها.

### فكرة الدرس

- حل المتباينات التي تحتوي أدوات الربط (و) ، (أو) وتمثيل الحل على مستقيم الأعداد.

### المفردات

- المتباينة المركبة
- التقاطع
- الاتحاد
- مجموعة الحل

## [1-3-1] المتباينات المركبة التي تتضمن (و)

### Compound inequalities contain “and”

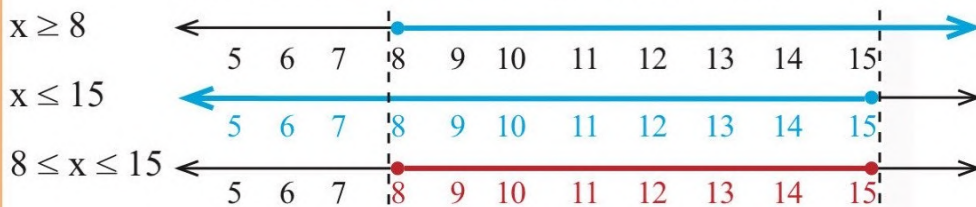
تعرفت سابقاً إلى المتباينات الجبرية وخواصها وكيفية إيجاد مجموعة الحل لها وتمثيله على مستقيم الأعداد، والآن سوف نتعرف إلى المتباينات المركبة التي تحتوي على أداة الربط (و) وكيفية إيجاد مجموعة الحل لها وتمثيله على مستقيم الأعداد الحقيقية. المتباينة المركبة التي تحتوي على أداة الربط (و) مؤلفة من متباينتين فإنها تكون صحيحة فقط إذا كانت المتباينتان صحيحتين، وعليه فإن مجموعة الحل لها عبارة عن مجموعة تقاطع حل المتباينتين، ويمكن إيجاده بطريقتين الأولى بيانياً بتمثيل حل المتباينتين على مستقيم الأعداد ثم تحديد منطقة التقاطع، والثانية جبرياً وذلك بإيجاد مجموعة الحل لكل متباينة ثم أخذ مجموعة التقاطع لهما  $(S = S_1 \cap S_2)$ .

### مثال (1)

اكتب المتباينة المركبة التي تمثل درجة الحرارة السيليزية الصغرى والكبرى في بغداد وجد حلها.

درجة الحرارة (الصغرى) لا تقل عن  $8^{\circ}$  ( $x \geq 8$ )، درجة الحرارة (الكبرى) لا تزيد على  $15^{\circ}$  ( $x \leq 15$ )،

لا تقل درجة الحرارة عن  $8^{\circ}$  ولا تزيد على  $15^{\circ}$  ( $x \geq 8$  و  $x \leq 15$ )، ويمكن حلها بإحدى الطريقتين:



الطريقة الأولى: بيانياً

وتقرأ  $x$  أكبر من أو تساوي 8

وأقل من أو تساوي 15

$$8 \leq x \leq 15 \Leftrightarrow x \geq 8 \text{ و } x \leq 15$$

الطريقة الثانية: جبرياً

$$\Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = \{x: x \geq 8\} \cap \{x: x \leq 15\} = \{x: 8 \leq x \leq 15\}$$

### مثال (2)

حل المتباينة المركبة التي تتضمن (و)  $-3 \leq 3x+2 < 9$  جبرياً ومثل الحل على مستقيم الأعداد:

$$-3 \leq 3x+2 < 9 \Rightarrow -3-2 \leq 3x+2-2 < 9-2 \Rightarrow -5 \leq 3x < 7 \Rightarrow \frac{-5}{3} \leq \frac{3x}{3} < \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-5}{3} \leq x < \frac{7}{3} \Rightarrow S = \{x: \frac{-5}{3} \leq x < \frac{7}{3}\}$$





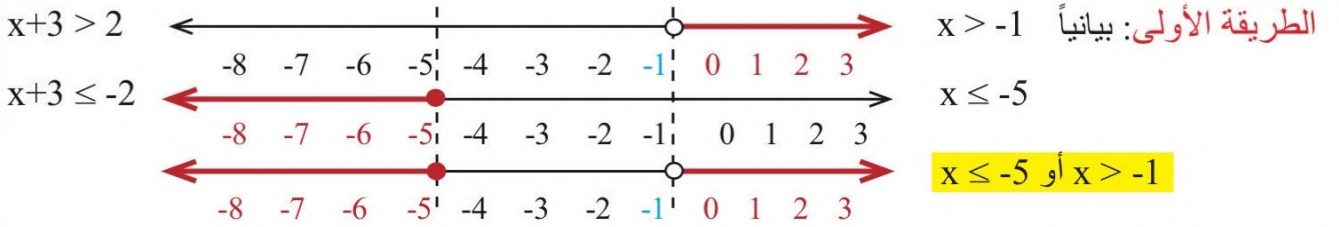
## [1-3-2] المتباينات المركبة التي تتضمن (أو)

### Compound inequalities contain "or"

بعد أن تعرفت إلى المتباينة المركبة التي تحتوي على أداة الربط (و) سوف نتعرف إلى المتباينة المركبة التي تحتوي على أداة الربط (أو) وتكون صحيحة فقط إذا كانت إحدى المتباينتين المكونتين لها في الأقل صحيحة، وعليه فإن مجموعة الحل لها عبارة عن مجموعة اتحاد حل المتباينتين، ويمكن إيجاد بطريقتين الأولى بيانياً بتمثيل حل المتباينتين على مستقيم الأعداد ثم تحديد منطقة الاتحاد، والثانية جبرياً وذلك بإيجاد مجموعة الحل لكل متباينة ثم أخذ مجموعة الاتحاد لهما  $(S = S_1 \cup S_2)$ .

#### مثال (3)

حل المتباينة المركبة  $x+3 > 2$  أو  $x+3 \leq -2$  بيانياً وجبرياً.

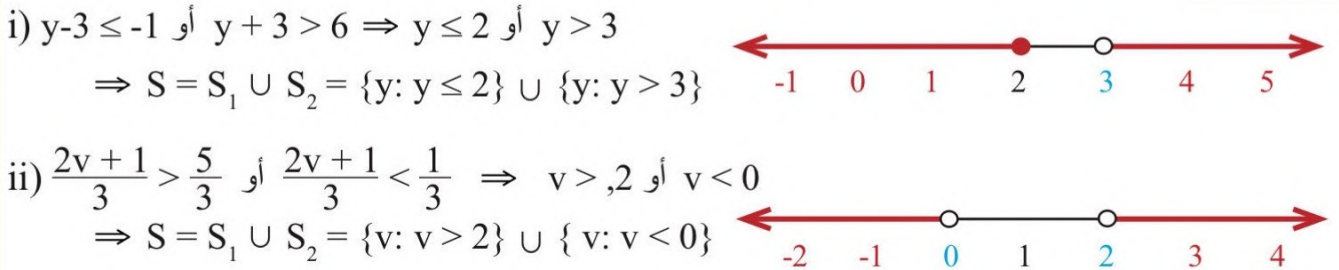


#### الطريقة الثانية: جبرياً

$$x+3 > 2 \text{ أو } x+3 \leq -2 \Rightarrow \begin{cases} x+3 > 2 \text{ أو } x+3 \leq -2 \\ x > -1 \text{ أو } x \leq -5 \end{cases} \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{x: x > -1\} \cup \{x: x \leq -5\}$$

#### مثال (4)

حل المتباينة التي تتضمن (أو) جبرياً ومثل الحل على مستقيم الأعداد:



## [1-3-3] المتباينة المثلثية

### Triangular inequality

من المواضيع التي تربط الجبر بالهندسة هي المتباينة المثلثية "في كل مثلث مجموع طول ضلعين من أضلاعه يكون أكبر من طول الضلع الثالث" وتستخدم في الإنشاءات الهندسية والتصاميم، إذا كانت أطوال أضلاع مثلث (ABC) فيجب أن تكون المتباينات الثلاث التالية صحيحة:  $A+B > C$ ,  $A+C > B$ ,  $B+C > A$ .

#### مثال (5)

i) هل يمكن للقطع المستقيمة التي طولها 2cm، 10cm، 13cm أن تشكل مثلثاً؟

لا يمكن أن تشكل مثلثاً لأنه: خطأ  $2 + 10 > 13$ ، صحيحة  $10 + 13 > 2$ ، صحيحة  $2 + 13 > 10$ .

ii) اكتب متباينة مركبة تبين طول الضلع الثالث في مثلث طول ضلعين فيه 10cm، 8cm.

نفرض طول الضلع الثالث x ومنه:

$$\left. \begin{aligned} 8+10 > x &\Rightarrow 18 > x \Rightarrow \text{الضلع الثالث أصغر من 18} \\ 8+x > 10 &\Rightarrow x > 2 \Rightarrow \text{الضلع الثالث أكبر من 2} \\ 10+x > 8 &\Rightarrow x > -2 \Rightarrow \text{لا تعطي أية معلومات مفيدة} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{ولذا يجب أن يكون طول الضلع أصغر من 18 وأكبر من 2 وبالمتباينة المركبة} \\ &\text{تبين طول الضلع الثالث } 2 < x < 18 \end{aligned}$$

## تأكّد من فهمك

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) بيانياً:

1  $-4 \leq y - 1 < 3$

2  $-4 \leq z + 2 \leq 8$

الأسئلة (1 - 2)

مشابهة للمثال (1)

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبرياً ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد:

3  $x + 6 \geq 12$  و  $x + 6 < 15$

4  $-9 < 2x - 1 \leq 3$

الأسئلة (3 - 4)

مشابهة للمثال (2)

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) بيانياً:

5  $8y \geq 64$  أو  $8y \leq 32$

6  $\frac{2z}{3} < \frac{2}{3}$  أو  $\frac{2z}{3} \geq \frac{8}{9}$

الأسئلة (5 - 6)

مشابهة للمثال (3)

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبرياً ومثل الحل على مستقيم الأعداد:

7  $3n - 7 > -5$  أو  $3n - 7 \leq -9$

8  $x + 15 \geq 30$  أو  $x + 15 < 22$

الأسئلة (7 - 8)

مشابهة للمثال (4)

هل يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه كما يأتي:

9 1cm, 2cm,  $\sqrt{3}$  cm

10 5cm, 4cm, 9cm

الأسئلة (9 - 12)

11 1cm,  $\sqrt{2}$  cm,  $\sqrt{2}$  cm

12 3cm, 4cm,  $2\sqrt{3}$  cm

مشابهة للمثال (5)

## تدرب وحلّ التمرينات

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) بيانياً:

13  $x > -12$  و  $x \leq -7$

14  $2 \leq y + 4 < 6$

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبرياً ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد:

15  $14 \leq 3x + 7$  و  $3x + 7 < 26$

16  $\frac{1}{25} \leq \frac{z+3}{5} \leq \frac{1}{15}$

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) بيانياً:

17  $z - 2 < -7$  أو  $z - 2 > 4$

18  $x - 6 \leq -1$  أو  $x - 6 > 4$

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبرياً ومثل الحل على مستقيم الأعداد:

19  $\frac{y}{2} < 3\frac{1}{2}$  أو  $\frac{y}{2} > 7\frac{1}{2}$

20  $5x \leq -1$  أو  $5x \geq 4$

اكتب المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث في المثلث إذا كان طولاً ضلعي المثلث معلومين:

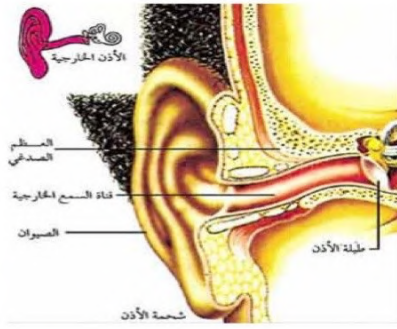
21 3cm, 10cm

22 6cm, 4cm

23 1cm, 3cm



## تدرب وحل مسائل حياتية



24 **صوت:** أذن الإنسان يمكن أن تسمع الأصوات التي لا يقل ترددها عن 20 هرتزاً ولا يزيد على 20000 هرتز. اكتب متباينة مركبة تمثل الترددات التي لاتسمعها أذن الإنسان، ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.



25 **إطار السيارات:** ضغط الهواء المثالي الموصى به لإطارات السيارات الصالون لا يقل عن 28 Pascal ( $N/m^2$ ) ولا يزيد على 36 Pascal. اكتب متباينة مركبة تمثل الضغط، ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.

**ملاحظة:** باسكال (pascal) وحدة قياس ضغط الهواء مقدرة ( $N/m^2$ )



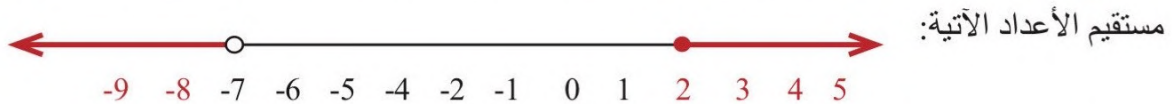
26 **القطار المغناطيسي:** القطار المغناطيسي المعلق وهو قطار يعمل بقوة الرفع المغناطيسية وباختصار يعرف بالماجليف (Maglev). وصُممت أنواع مختلفة من هذه القطارات المغناطيسية في مختلف دول العالم إذ إنّ سرعتها لاتقل عن 300 k/h ولا تزيد على 550 k/h. اكتب متباينة تمثل سرعة القطار، ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.

## فكر

27 **تحذّر:** اكتب متباينة مركبة تبين مدى طول الضلع الثالث في كلّ مثلث:

7cm, 12cm, x cm

28 **أصحّ الخطأ:** قالت سوسن إنّ المتباينة المركبة  $x+3 \leq 5$  و  $-4 < x+3$  تمثل مجموعة الحل على



مستقيم الأعداد الآتية:

29 **حسّ عدديّ:** اذكر ما إذا كانت الأطوال الثلاثة هي لمثلث أم لا؟ وضح إجابتك.

i) 3.2cm, 5.2cm, 6.2cm

ii) 1cm, 1cm,  $\sqrt{2}$  cm

## أكتب

متباينة مركبة التي تمثل درجة الحرارة الصغرى  $18^\circ$  ودرجة الحرارة العظمى  $27^\circ$ .





## تعلم

فندق بابل من الفنادق السياحية في العاصمة بغداد ويقع في منطقة الكرادة. درجة حرارة الماء المثالية في حوض السباحة 25 درجة سيليزية تزداد أو تنقص بمقدار درجة واحدة. اكتب متباينة قيمة مطلقة تمثل مدى درجة حرارة الماء في حوض السباحة.

## فكرة الدرس

- حل المتباينات التي تحتوي على قيمة مطلقة.

## المفردات

- القيمة المطلقة

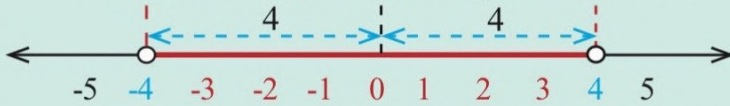
[1-4-1] متباينات القيمة المطلقة التي على صورة  $|g(x)| < a$  ،  $|g(x)| \leq a$  ، حيث  $x \in \mathbb{R}$

Absolute value inequalities with form  $|g(x)| < a$  ،  $|g(x)| \leq a$  ،  $a \in \mathbb{R}^+$

تعرفت سابقاً إلى المتباينات المركبة التي تحتوي على (و) و (أو) وكيفية حلها بيانياً وجبرياً وكيفية تمثيل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.

والآن سوف نتعرف إلى متباينة القيمة المطلقة التي على صورة  $|g(x)| < a$  ،  $|g(x)| \leq a$  ،  $a \in \mathbb{R}$

مثل  $|x| < 4$  وتعني: ما قيمة  $x$  التي تبعد عن الصفر بأقل من 4 وحدات؟ وهي كل الأعداد التي بين العددين -4 و 4 وتمثيلها على مستقيم الأعداد هو:



ونلاحظ أن حل هذه المتباينة هو  $x < 4$  و  $-4 < x$

أي إن متباينة القيمة المطلقة بعلاقة أصغر من (أصغر من أو يساوي) تمثل متباينة مركبة تتضمن (و).

بصورة عامة  $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$  ،  $a > 0$

**مثال (1)** اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل درجة حرارة الماء في الحوض ومثله بيانياً.

نفرض درجة حرارة الماء هي  $x$  درجة سيليزية، لذا المتباينة التي تمثل درجة حرارة الحوض عندما لا تزيد على 26<sup>0</sup> سيليزية:

$$x \leq 25 + 1 \Rightarrow x - 25 \leq 1$$

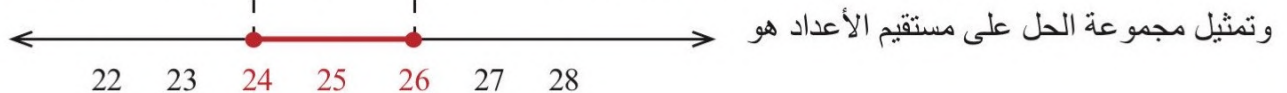
|

والمتباينة التي تمثل درجة حرارة الحوض عندما لا تنقص عن 24<sup>0</sup> درجة سيليزية:

$$x \geq 25 - 1 \Rightarrow x - 25 \geq -1$$

لذا متباينة القيمة المطلقة هي المتباينة المركبة التي تمثل مدى درجة حرارة الماء في حوض السباحة:

$$x - 25 \geq -1 \text{ و } x - 25 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x - 25 \leq 1 \Rightarrow |x - 25| \leq 1$$



**مثال (2)** حل متباينات القيمة المطلقة، ومثل الحل على مستقيم الأعداد.

i)  $|x + 6| < 3 \Rightarrow -3 < x + 6 < 3 \Rightarrow -3 - 6 < x < 3 - 6$

$$\Rightarrow -9 < x < -3$$



ii)  $|y| - 5 \leq 1 \Rightarrow |y| \leq 1 + 5 \Rightarrow |y| \leq 6$

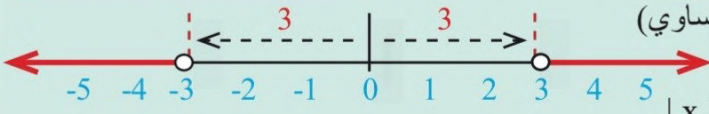
$$\Rightarrow -6 \leq y \leq 6$$





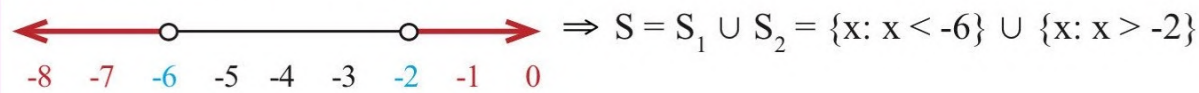
## [1-4-2] متباينات القيمة المطلقة التي على صورة $|g(x)| \geq a$ ، $|g(x)| > a$ حيث $x \in \mathbb{R}$ Absolute value inequalities with form $|g(x)| > a$ ، $|g(x)| \geq a$ , $a \in \mathbb{R}^+$

بعد أن تعرفت إلى متباينة القيمة المطلقة التي تحتوي على صورة  $|g(x)| \leq a$  ،  $|g(x)| < a$  حيث  $x \in \mathbb{R}$  والآن سوف نتعرف إلى متباينة القيمة المطلقة التي على صورة  $|g(x)| \geq a$  ،  $|g(x)| > a$  حيث  $x \in \mathbb{R}$  مثل  $|x| > 3$  وتعني: المسافة بين  $x$  والصفر أكبر من 3 أي أن  $x < -3$  أو  $x > 3$  ومجموعة حل المتباينة هو  $\{x: x < -3\} \cup \{x: x > 3\}$  لذا فإن متباينة القيمة المطلقة بعلاقة أكبر من (أكبر من أو يساوي) هي علاقة مركبة تتضمن (أو). بصورة عامة  $|x| \geq a \iff x \geq a$  أو  $x \leq -a$  ,  $a > 0$

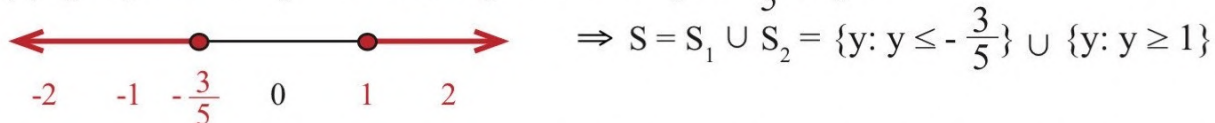


### مثال (3) حل متباينة القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد.

i)  $|x + 4| > 2 \Rightarrow x + 4 < -2$  أو  $x + 4 > 2 \Rightarrow x < -6$  أو  $x > -2$



ii)  $|5y - 1| \geq 4 \Rightarrow 5y - 1 \leq -4$  أو  $5y - 1 \geq 4 \Rightarrow y \leq -\frac{3}{5}$  أو  $y \geq 1$



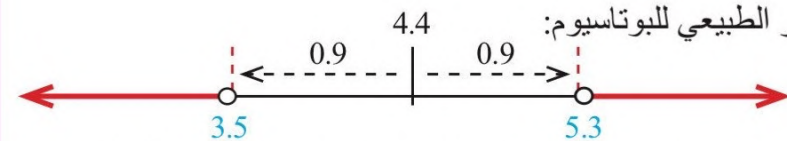
iii) في تحليلات دم الإنسان البالغ يعد المدى الطبيعي للبوتاسيوم هو  $(3.5 - 5.3) \text{ mol/L}$ . اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المدى غير الطبيعي للبوتاسيوم في دم الإنسان.

المتباينة التي تمثل كمية البوتاسيوم غير الطبيعية وأقل من القيمة الدنيا للمعدل هي:  $x < 3.5$

المتباينة التي تمثل كمية البوتاسيوم غير الطبيعية وأكبر من القيمة العليا للمعدل هي:  $x > 5.3$

المدى غير الطبيعي للبوتاسيوم هو حل المتباينة المركبة:  $x < 3.5$  أو  $x > 5.3$

نجد متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المدى غير الطبيعي للبوتاسيوم:



نأخذ منتصف المسافة بين نقطتين ونطرح ونضيف نصف قطر المسافة

$$x < 3.5 \text{ أو } x > 5.3 \iff x < 4.4 - 0.9 \text{ أو } x > 4.4 + 0.9$$

$$\iff x - 4.4 < -0.9 \text{ أو } x - 4.4 > 0.9 \iff |x - 4.4| > 0.9$$

### مثال (4) جد مجموعة الحل لمتباينات القيمة المطلقة الآتية:

i)  $|2x - 5| + 3 < 11 \Rightarrow |2x - 5| < 8 \Rightarrow -8 < 2x - 5 < 8 \Rightarrow -3 < 2x < 13$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{13}{2} \Rightarrow \{x: x > -\frac{3}{2}\} \cap \{x: x < \frac{13}{2}\} \Rightarrow \{x: -\frac{3}{2} < x < \frac{13}{2}\}$$

ii)  $|7 - y| < 8 \Rightarrow -8 < 7 - y < 8 \Rightarrow -15 < -y < 1 \Rightarrow -1 < y < 15 \Rightarrow \{y: y > -1\} \cap \{y: y < 15\}$

iii)  $|\frac{2t-8}{4}| \geq 9 \Rightarrow |\frac{2(t-4)}{4}| \geq 9 \Rightarrow |\frac{t-4}{2}| \geq 9 \Rightarrow |t-4| \geq 18$

$$\Rightarrow t - 4 \leq -18 \text{ أو } t - 4 \geq 18 \Rightarrow t \leq -14 \text{ أو } t \geq 22 \Rightarrow \{t: t \leq -14\} \cup \{t: t \geq 22\}$$

iv)  $|\frac{5-3v}{2}| \geq 6 \Rightarrow |5-3v| \geq 12 \Rightarrow 5-3v \leq -12 \text{ أو } 5-3v \geq 12 \Rightarrow -3v \leq -17 \text{ أو } -3v \geq 7$

$$\Rightarrow v \geq \frac{17}{3} \text{ أو } v \leq -\frac{7}{3} \Rightarrow \{v: v \geq \frac{17}{3}\} \cup \{v: v \leq -\frac{7}{3}\}$$

## تأكّد من فهمك

اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المسائل التالية:

1

تعد درجة الحرارة المثلى داخل الشقق  $22^{\circ}$  سيليزية بزيادة أو نقصان لا يتجاوز  $2^{\circ}$  سيليزية.

السؤال 1

مشابه للأمتلة (1,3)

حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد.

2  $|x + 1| < 5$

3  $|3z - 7| \leq 2$

الأسئلة (2 - 5)

4  $|x| + 8 < 9$

5  $|5y| - 2 \leq 8$

مشابه للمثال (2)

6  $|x + 4| > 6$

7  $|5z - 9| > 1$

الأسئلة (6 - 9)

8  $|2x| + 7 \geq 8$

9  $|4y| - 2 > 3$

مشابه للمثال (3)

10  $|5 - x| < 10$

11  $|4z - 14| > 2$

الأسئلة (10 - 13)

12  $|\frac{x - 12}{4}| \leq 9$

13  $|\frac{6 - 2y}{4}| \geq 9$

مشابه للمثال (4)

## تدرب وحلّ التمرينات

اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المسائل الآتية:

14

يجب أن تبقى درجة الحرارة داخل الثلاجة  $8^{\circ}$  سيليزية بزيادة أو نقصان لا يتجاوز  $0.5^{\circ}$  سيليزية. اكتب مدى درجة الحرارة المثالية في داخل الثلاجة.

15

درجة غليان الماء  $100^{\circ}$  سيليزية عند مستوى سطح البحر وتزداد وتنقص في المناطق الجبلية والوديان بما لا يتجاوز  $20^{\circ}$  سيليزية. اكتب مدى التذبذب في درجة غليان الماء.

حل متباينات القيمة المطلقة الآتية:

16  $|x + 3| < 6$

17  $|2z| - 5 < 2$

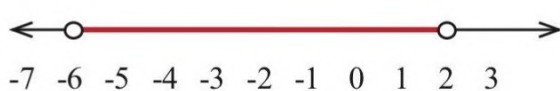
18  $2|x| - 7 \geq 1$

19  $|11z| - 2 \geq 9$

20  $|\frac{4}{5}z - 1| > \frac{4}{5}$

اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة لكل من التمثيلات البيانية الآتية:

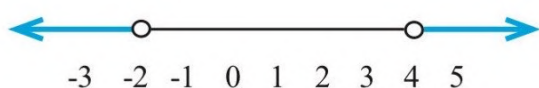
21



22



23



24





## تدرب وحل مسائل حياتية

اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل كل مسألة مما يأتي:



25 **الغرير:** حيوان الغرير هو أحد أنواع الثدييات، ينتمي إلى شعبة الحبليات، ويمتلك قوائم قصيرة نوعاً ما، ويعيش في الحُفر التي يحفرها في الأرض، طول جسمه من الرأس الى الذيل يصل من 68cm إلى 76cm. اكتب مدى طول الغرير.



26 **صحة:** معدل النبض (عدد دقات القلب) الطبيعي للإنسان البالغ يتراوح من 60 الى 90 نبضة في الدقيقة. اكتب مدى عدد الدقات غير الطبيعية لقلب الإنسان.



27 **مواصلات:** تطير الطائرات المدنية على ارتفاع يتراوح من 8km إلى 10km إذ تعد منطقة جوية معتدلة. اكتب مدى منطقة الطيران المدنية.

## فكّر

28 **تحذّر:** حل متباينات القيمة المطلقة ومثلّ الحل على مستقيم الأعداد.

$$i) \left| \frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}} \right| \leq \sqrt{6}$$

$$ii) \left| \frac{\sqrt{12} - \sqrt{3}y}{\sqrt{5}} \right| \geq \sqrt{15}$$

29 **أصحّ الخطأ:** قالت خلود إن متباينة القيمة المطلقة  $|6 - 3y| \geq 7$  تمثل متباينة مركبة بعلاقة (و) ومجموعة

الحل لها:  $\{y: -\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{13}{2}\}$ . بيّن خطأ خلود وصحّحه.

30 **حسّ عدديّ:** اكتب مجموعة الحل لمتباينات القيمة المطلقة التالية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$i) |z| - 1 < 0$$

$$ii) |x - 1| > 0$$

## أكتب

متباينة قيمة مطلقة تمثل موقفاً من واقع الحياة، ومثلّ مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية:

1  $(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5}) = \dots$  2  $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{8} - 5}{3\sqrt{2}} = \dots$

3 استعمل ترتيب العمليات والحاسبة لتكتب ما يلي مقرباً لأقرب عُشر:

$(\frac{1}{125})^{\frac{1}{3}} - (-\frac{1}{2})^0 + (121)^{\frac{1}{2}} \times (\frac{1}{9})^{\frac{1}{2}} = \dots$

4 إذا كان  $f: Z \rightarrow R$  حيث  $f(x) = x^2$ . ارسـم مخططاً سهماً للتطبيق وبيّن هل أنّ التطبيق متباين، شامل، أو متقابل؟

5 إذا كان التطبيق  $f: N \rightarrow N$  إذ إنّ  $f(x) = 3x + 1$  و  $g: N \rightarrow N$  إذ  $g(x) = x^2$ .  
جد:  $(f \circ g)(5)$ ,  $(g \circ f)(5)$ ,  $(f \circ g)(2)$ ,  $(g \circ f)(2)$ .

6 إذا كان التطبيق  $f: R \rightarrow R$  حيث  $f(x) = 3x + 1$  والتطبيق  $g: R \rightarrow R$  إذ أنّ  $g(x) = 2x + 5$ .  
هل أنّ  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ ؟ جد قيمة  $x$  إذا كانت  $(f \circ g)(x) = 28$ .

حلّ المتباينات المركّبة ومثّل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد:

7  $x + 6 \geq 12$  و  $x + 6 < 20$  8  $\frac{1}{16} < \frac{z+2}{2} \leq \frac{1}{8}$  9  $x - 3 \leq -5$  أو  $x - 3 > 5$

10  $7t - 5 > -1$  أو  $7t - 5 \leq -14$  11  $y \leq 0$  أو  $y + 7 \geq 16$  12  $\frac{y}{3} < 1\frac{1}{3}$  أو  $\frac{y}{3} > 9\frac{1}{3}$

اكتب المتباينة المركّبة التي تبين مدى طول الضلع الثالث في المثلث إذا كان طولاً ضلعي المثلث معلومين:

13 4cm , 9cm 14 5cm , 12cm 15 7cm , 15cm

حلّ متباينات القيمة المطلقة الآتية:

16  $|x - 6| \leq 3$  17  $|3z - 5| < 4$  18  $|x + 1| > \frac{1}{2}$

19  $6|x| - 8 \geq 3$  20  $|3y| - 2 > 9$  21  $|8z| - 1 > 7$

22  $|4 - 3y| \geq 14$  23  $|\frac{6-3y}{9}| \geq 5$



## المقادير الجبرية

## Algebraic Expressions

- الدرس 2-1 ضرب المقادير الجبرية
- الدرس 2-2 تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر
- الدرس 2-3 تحليل المقدار الجبري بالمتطابقات
- الدرس 2-4 تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة
- الدرس 2-5 تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين أو الفرق بين مكعبين
- الدرس 2-6 تبسيط المقادير الجبرية النسبية

المدرسة المستنصرية مدرسة عريقة أسست في زمن العباسيين في بغداد عام 1233، وكانت مركزاً علمياً وثقافياً مهماً. تقع في جهة الرصافة من بغداد، وتتوسط المدرسة ساحة مستطيلة الشكل فيها نافورة كبيرة فيها ساعة المدرسة المستنصرية، لو فرضنا أن طول الساحة الداخلية للمدرسة هو  $(x+14)$  متراً وعرضها  $(x+2)$  متراً، فيمكن حساب المساحة بضرب المقدارين الجبريين  $(x+14)(x+2)$ .



جد ناتج جمع المقادير الجبرية التالية أو طرحها:

1  $(3x^2 + 4x - 12) + (2x^2 - 6x + 10)$

2  $(\frac{1}{2}zy + 5z - 7y) - (\frac{1}{4}zy - 3z + 2y)$

جد ناتج الضرب للحدود الجبرية الآتية:

3  $7x^2 \times \frac{1}{14x}$

4  $\sqrt{2}yz \times \sqrt{2}yz^2$

5  $\frac{3}{4}v^2t \times \sqrt{12}t^{-1}$

6  $3h(\frac{1}{6}v - \frac{1}{3}h^{-2})$

جد ناتج ضرب مقدارين جبريين:

7  $(x+2)(x-2)$

8  $(5-2z)(3+3z)$

9  $(\frac{1}{2}x^2+6)(\frac{4}{3}x^2+12)$

10  $(2\sqrt{3}t-4)^2$

11  $(x+3)(x^2-3x+9)$

12  $(xy+1)(x^{-1}y - xy^{-1}-1)$

جد ناتج الضرب باستعمال الطريقة العمودية:

13  $(y-1)(y+1)$

14  $(2x+3)(4x^2-x-5)$

15  $(3-z)(3+5z-z^2)$

جد ناتج قسمة المقادير الجبرية الآتية:

16  $\frac{3xy^2}{15x^2y}$

17  $\frac{-47z^{-2}}{7z^2}$

18  $\frac{8x^3+4x^2-2x}{2x}$

19  $\frac{21-14a+7a^2}{7a}$

حلل المقادير الجبرية باستعمال العامل المشترك الأكبر:

20  $3y^3+6y^2-9y$

21  $\frac{1}{2}zx^2-2z^2x+4zx$



## Multiplying Algebraic Expressions



## تعلم

حوّطت حديقة منزلية مربعة الشكل  
طول ضلعها  $h$  متر بممر عرضه 1  
متر.  
ما مساحة الممر بدلالة  $h$  ؟

## فكرة الدرس

- ضرب مقدار جبري في مقدار جبري يمثل حالات خاصة.
- المفردات
- مربع مجموع
- مربع فرق
- مكعب مجموع
- مكعب فرق

## [2-1-1] ضرب مقدارين جبريين كل منهما من حدين

## Multiplying two algebraic expressions each of one contains two terms

تعلمت سابقاً كيفية ضرب حد جبري في حد جبري وكذلك ضرب مقدار جبري في مقدار جبري، الآن سوف نتعلم كيفية ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين ويمثلان مربع مجموع أو مربع فرق أو مجموع في فرق وذلك باستعمال الخواص التي درستها سابقاً من توزيع وإبدال وترتيب.

## مثال (1) جد مساحة الممر المحيط بالحديقة المربعة الشكل؟

مساحة الممر هي الفرق بين مساحتي المربع الكبير (الحديقة مع الممر) والمربع الصغير (الحديقة)

$$(h+2)^2 = (h+2)(h+2) = h^2 + 2h + 2h + 4 = h^2 + 4h + 4$$

مساحة الحديقة مع الممر

$$h \times h = h^2$$

مساحة الحديقة

$$(h^2 + 4h + 4) - h^2 = h^2 + 4h + 4 - h^2 = 4h + 4$$

مساحة الممر

## مثال (2) جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

$$i) (x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

مربع مجموع حدين

$$ii) (x - y)^2 = (x - y)(x - y) = x^2 - xy - yx + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

مربع الفرق بين حدين

$$iii) (x + y)(x - y) = x^2 - xy + yx - y^2 = x^2 - y^2$$

مجموع حدين  $\times$  فرق بينهما

$$iv) (x + 3)(x + 5) = x^2 + 5x + 3x + 15 = x^2 + 8x + 15$$

مجموع حدين  $\times$  مجموع حدين

$$v) (x + 2)(x - 6) = x^2 - 6x + 2x - 12 = x^2 - 4x - 12$$

مجموع حدين  $\times$  فرق بين حدين

$$vi) (x - 1)(x - 4) = x^2 - 4x - x + 4 = x^2 - 5x + 4$$

فرق بين حدين  $\times$  فرق بين حدين

## مثال (3) جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية:

$$i) (z + 3)^2 = z^2 + 6z + 9$$

$$ii) (h - 5)^2 = h^2 - 10h + 25$$

$$iii) (2x - 7)(2x + 7) = 4x^2 - 49$$

$$iv) (3y + 1)(y + 2) = 3y^2 + 7y + 2$$

$$v) (v + \sqrt{2})(v - \sqrt{2}) = v^2 - 2$$

$$vi) (n - \sqrt{3})(5n - \sqrt{3}) = 5n^2 - 6\sqrt{3}n + 3$$

## [2-1-2] ضرب مقدار جبري من حدين في آخر من ثلاثة حدود

### Multiplying algebraic expression from two terms by another from three terms

تعلمت سابقاً ضرب المقادير الجبرية من عدة حدود والآن سوف تتعلم حالات خاصة من ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود وذلك باستعمال الخواص التي درستها في التوزيع والإبدال والترتيب.

#### مثال (4) جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

i)  $(x+2)(x^2-2x+4) = x^3-2x^2+4x+2x^2-4x+8 = x^3+8 = x^3+2^3$  ناتج الضرب مجموع مكعبين

ii)  $(y-3)(y^2+3y+9) = y^3+3y^2+9y-3y^2-9y-27 = y^3-27 = y^3-3^3$  ناتج الضرب الفرق بين مكعبين

iii)  $(y+2)^3 = (y+2)(y+2)^2 = (y+2)(y^2+4y+4)$  مكعب مجموع حدين

$$= y^3 + 4y^2 + 4y + 2y^2 + 8y + 8 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$$

iv)  $(z-3)^3 = (z-3)(z-3)^2 = (z-3)(z^2-6z+9)$  مكعب الفرق بين حدين

$$= z^3 - 6z^2 + 9z - 3z^2 + 18z - 27 = z^3 - 9z^2 + 27z - 27$$

#### مثال (5) جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية:

i)  $(2v+5)(4v^2-10v+25) = 8v^3-20v^2+50v+20v^2-50v+125 = 8v^3+125 = (2v)^3+5^3$

ii)  $(\frac{1}{3}-z)(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}z+z^2) = \frac{1}{27}+\frac{1}{9}z+\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{9}z-\frac{1}{3}z^2-z^3 = \frac{1}{27}-z^3 = (\frac{1}{3})^3-z^3$

iii)  $(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}) = x^3+\sqrt[3]{2}x^2+\sqrt[3]{4}x-\sqrt[3]{2}x^2-\sqrt[3]{4}x-\sqrt[3]{8}$

$$= x^3 + \sqrt[3]{2}x^2 - \sqrt[3]{2}x^2 + \sqrt[3]{4}x - \sqrt[3]{4}x - 2 = x^3 - 2$$

iv)  $(x+\frac{1}{2})^3 = (x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})^2 = (x+\frac{1}{2})(x^2+x+\frac{1}{4}) = x^3+x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$

$$= x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$$

v)  $(y-5)^3 = (y-5)(y-5)^2 = (y-5)(y^2-10y+25)$

$$= y^3 - 10y^2 + 25y - 5y^2 + 50y - 125$$

$$= y^3 - 15y^2 + 75y - 125$$



## تأكد من فهمك

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

1  $(x + 3)(x - 3)$

2  $(\sqrt{7} - h)^2$

3  $(z + \sqrt{5})(z - \sqrt{5})$

4  $(v + 5)(v + 1)$

5  $(x - 3)(x - 2)$

6  $(3x - 4)(x + 5)$

7  $(\frac{1}{3}y + 3)(\frac{1}{3}y + 2)$

الأسئلة (1 - 7)

مشابهة للمثالين (2,3)

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

8  $(y+2)(y^2 - 2y+4)$

9  $(2z + 4)(4z^2 - 8z + 16)$

الأسئلة (8 - 13)

مشابهة للمثالين (4,5)

10  $(v - \sqrt[3]{3})(v^2 + \sqrt[3]{3}v + \sqrt[3]{9})$

11  $(\sqrt[3]{\frac{2}{7}} + m)(\sqrt[3]{\frac{4}{49}} - \sqrt[3]{\frac{2}{7}}m + m^2)$

12  $(x + 5)^3$

13  $(y - 4)^3$

## تدرب وحل التمرينات

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

14  $(n - 6)^2$

16  $(y + \sqrt{6})(y - \sqrt{6})$

15  $(2x - 3)(x + 9)$

17  $(4 - y)(5 - y)$

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

18  $(x+6)(x^2 - 6x+36)$

19  $(z - 3)^3$

20  $(x - \sqrt[3]{4})(x^2 + \sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{16})$

21  $(\sqrt[3]{\frac{1}{5}} + n)(\sqrt[3]{\frac{1}{25}} - \sqrt[3]{\frac{1}{5}}n + n^2)$

## تدرب وحل مسائل حياتية



22 **مسبح:** يعد فندق بغداد أحد الفنادق السياحية المهمة في العاصمة العراقية بغداد، يبلغ طول المسبح فيه  $(x + 9)$  أمتار وعرضه  $(x + 1)$  متر، ومحاط بممر عرضه 1 متر. اكتب مساحة المسبح مع الممر بأبسط صورة بدلالة  $x$ .



23 **تاريخ:** تقع مدينة بابل شمال مدينة الحلة في العراق حيث عاش البابليون فيها منذ 3000 سنة قبل الميلاد تقريباً. وقد بنوا سنة 575م بوابة عشتار التي تعد البوابة الثامنة في سور مدينة بابل. رسم وائل لوحة فنية تمثل بوابة عشتار بالأبعاد  $(y + 7)$ ،  $(y - 4)$  سنتمترات. اكتب مساحة اللوحة التي رسمها وائل بأبسط صورة بدلالة  $y$ .



24 **أسماك زينة:** حوض سمك زينة مكعب الشكل طول حرفه  $(v + 3)$  سنتمتر. اكتب حجم حوض الزينة بأبسط صورة بدلالة  $v$ .

## فكر

25 **تحذ:** جد ناتج ما يأتي بأبسط صورة:

$$(x + 1)^2 - (x - 2)^2$$

26 **أصح الخطأ:** كتبت نسرين ناتج ضرب المقدارين الجبريين كآتي:

$$(\sqrt{5}h - 4)(h - 6) = 5h^2 + 10h - 24$$

حدّد خطأ نسرين وصحّحه.

27 **حس عددي:** أيّ العددين أكبر؟ العدد  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$  أم العدد  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ . وضّح إجابتك.

## أكتب

ناتج ضرب المقدارين الجبريين:

$$(2z + \frac{1}{2})(2z - \frac{1}{2})$$



## الدرس [2-2]

### تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر Factoring the Algebraic Expression by using a Greater Common Factor



#### تعلم

يعد نصب ساحة كهرومائية وسط بغداد من المعالم الحضارية المتميزة في العراق. يتوسط تمثال كهرومائية الساحة التي تقع في منطقة الكرادة ويبلغ نصف قطر قاعدة التمثال  $r$  متر ويحيط به حوض على شكل ممر دائري، إذا كان نصف قطر التمثال مع الحوض  $r + 2$  متر، فجد مساحة الحوض.

#### فكرة الدرس

- تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر.
- تحليل المقدار الجبري العامل المشترك الأكبر
- ثنائية الحد
- المعكوس
- التحقق من صحة الحل

### [2-2-1] تحليل مقدار جبري باستعمال العامل المشترك الأكبر

#### Factoring the algebraic expression by using a greater common factor

تعلمت سابقاً كيفية إيجاد العامل المشترك الأكبر للأعداد وكذلك تعلمت كيفية تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF)، والآن سوف تزيد مهارتك في تعلم كيفية تحليل مقادير جبرية مكونة من حدين أو ثلاثة حدود باستعمال العامل المشترك الأكبر والتحقق من صحة الحل.

**مثال (1)** نصف قطر قاعدة تمثال كهرومائية  $r$  متر، ونصف قطر قاعدة التمثال مع الحوض  $r + 2$  متر، جد مساحة الحوض.

$$A_1 = r^2 \pi$$

مساحة التمثال

$$A_2 = (r + 2)^2 \pi = (r^2 + 4r + 4) \pi = r^2 \pi + 4r \pi + 4 \pi$$

مساحة التمثال مع الحوض

$$A = A_2 - A_1 = r^2 \pi + 4r \pi + 4 \pi - r^2 \pi$$

مساحة الحوض

$$= 4r \pi + 4 \pi = 4 \pi (r + 1)$$

( $4 \pi$ ) العامل المشترك الأكبر

مساحة الحوض المحيط بالتمثال  $4 \pi (r + 1)$  متر مربع

### مثال (2) حل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل:

$$i) 6x^3 + 9x^2 - 18x = 3x (2x^2 + 3x - 6)$$

العامل المشترك الأكبر هو  $3x$

التحقق:

$$3x (2x^2 + 3x - 6) = 3x (2x^2) + 3x (3x) - 6(3x)$$

للتحقق استعمل عملية ضرب المقادير الجبرية

$$= 6x^3 + 9x^2 - 18x$$

$$ii) \sqrt{12} y^2 z + \sqrt{2} (\sqrt{6} yz^2 - \sqrt{24} yz)$$

فتح القوس مع تبسيط الجذور العددية

$$= 2\sqrt{3} y^2 z + 2\sqrt{3} yz^2 - 4\sqrt{3} yz$$

العامل المشترك الأكبر هو  $2\sqrt{3} yz$

$$= 2\sqrt{3} yz (y + z - 2)$$

التحقق:

$$2\sqrt{3} yz (y + z - 2) = 2\sqrt{3} y^2 z + 2\sqrt{3} yz^2 - 4\sqrt{3} yz$$

للتحقق استعمل عملية ضرب المقادير الجبرية

نلاحظ المتغيرات متساوية في الحدود مع المقدار الأصلي وكذلك المعاملات العددية لأن:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{12}, 2\sqrt{3} = \sqrt{2} \sqrt{6}, 4\sqrt{3} = \sqrt{2} \sqrt{24}$$



### مثال (3) حل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

- i)  $5x(x+3) - 7(x+3) = (x+3)(5x-7)$  العامل المشترك الأكبر هو  $(x+3)$
- ii)  $\frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{3}y^2(y-1) = (y-1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}y^2\right)$  العامل المشترك الأكبر هو  $(y-1)$
- iii)  $\sqrt{3}v^2(z+2) - \sqrt{5}v(z+2) = (z+2)(\sqrt{3}v^2 - \sqrt{5}v)$  العامل المشترك الأكبر هو  $(z+2)$   
 $= v(z+2)(\sqrt{3}v - \sqrt{5})$

### [2-2-2] تحليل مقدار جبري باستعمال التجميع

#### Factoring algebraic expression by grouping

تعلمت في الفقرة السابقة كيفية تحليل المقدار الجبري المكون من حدين أو ثلاثة حدود باستعمال العامل المشترك الأكبر، والآن سوف نتعلم كيفية تحليل مقدار جبري مكون من أربعة حدود أو أكثر باستعمال تجميع الحدود بحيث يوجد للحدود التي يمكن تجميعها عوامل مشتركة.

### مثال (4) حل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل:

- i)  $4x^3 - 8x^2 + 5x - 10 = (4x^3 - 8x^2) + (5x - 10)$  تجميع الحدود التي لها عوامل مشتركة  
 $= 4x^2(x - 2) + 5(x - 2)$  تحليل الحدود المجمعة  
 $= (x-2)(4x^2 + 5)$  العامل المشترك الأكبر هو  $(x-2)$
- التحقق:**  
 $(x-2)(4x^2 + 5) = x(4x^2 + 5) - 2(4x^2 + 5)$  استعمال خاصية التوزيع  
 $= 4x^3 + 5x - 8x^2 - 10 = 4x^3 - 8x^2 + 5x - 10$  استعمال الضرب والترتيب
- ii)  $\sqrt{2}h^2t + \sqrt{3}t^2v - \sqrt{8}h^2v - \sqrt{12}v^2t = (\sqrt{2}h^2t - \sqrt{8}h^2v) + (\sqrt{3}t^2v - \sqrt{12}v^2t)$  تجميع الحدود  
 $= \sqrt{2}h^2(t-2v) + \sqrt{3}tv(t-2v)$  تحليل الحدود المجمعة  
 $= (t-2v)(\sqrt{2}h^2 + \sqrt{3}tv)$  العامل المشترك الأكبر هو  $(t-2v)$
- التحقق:**  
 $(t-2v)(\sqrt{2}h^2 + \sqrt{3}tv) = t(\sqrt{2}h^2 + \sqrt{3}tv) - 2v(\sqrt{2}h^2 + \sqrt{3}tv)$  استعمال خاصية التوزيع  
 $= \sqrt{2}h^2t + \sqrt{3}t^2v - \sqrt{8}h^2v - \sqrt{12}v^2t$  استعمال الضرب والترتيب

### مثال (5) حل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس:

- $14x^3 - 7x^2 + 3 - 6x = (14x^3 - 7x^2) + (3 - 6x)$  تجميع الحدود  
 $= 7x^2(2x - 1) + 3(1 - 2x)$  تحليل الحدود المجمعة  
 $= 7x^2(2x - 1) + 3(-1)(2x - 1)$  استعمال المعكوس  
 $= 7x^2(2x - 1) - 3(2x - 1)$  كتابة  $(-1) + 3$  على شكل  $-3$   
 $= (2x - 1)(7x^2 - 3)$  العامل المشترك الأكبر هو  $(2x-1)$



## تأكّد من فهمك

حل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل:

1  $9x^2 - 21x$

2  $10 - 15y + 5y^2$

الأسئلة (1 - 4)

3  $14z^4 - 21z^2 - 7z^3$

4  $\sqrt{8} t^2r + \sqrt{2} (tr^2 - \sqrt{3} tr)$

مشابهة للمثال (2)

حل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

5  $3y(y - 4) - 5(y - 4)$

6  $\frac{1}{4}(t+5) + \frac{1}{3}t^2(t+5)$

الأسئلة (5 - 8)

7  $\sqrt{2}n(x+1) - \sqrt{3}m(x+1)$

8  $2x(x^2-3) + 7(x^2-3)$

مشابهة للمثال (3)

حل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل:

9  $3y^3 - 6y^2 + 7y - 14$

10  $21 - 3x + 35x^2 - 5x^3$

الأسئلة (9 - 12)

11  $2r^2k + 3k^2v - 4r^2v - 6v^2k$

12  $3z^3 - \sqrt{18}z^2 + z - \sqrt{2}$

مشابهة للمثال (4)

حل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس:

13  $21y^3 - 7y^2 + 3 - 9y$

14  $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + 5 - 10x$

الأسئلة (13 - 16)

15  $6z^3 - 9z^2 + 12 - 8z$

16  $5t^3 - 15t^2 - 2t + 6$

مشابهة للمثال (5)

## تدرب وحلّ التمرينات

حل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل:

17  $12y^3 - 21y^2$

18  $6v^2(3v - 6) + 18v$

حل المقدار التالي باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

19  $\frac{1}{7}(y+1) + \frac{1}{3}y^2(y+1)$

حل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل:

20  $5x^3 - 10x^2 + 10x - 20$

21  $3t^3k + 9k^2s - 6t^3s - 18s^2k$

حل المقدار التالي باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس:

22  $12x^3 - 4x^2 + 3 - 9x$

## تدرب وحل مسائل حياتية



- 23 **الطاقة الشمسية:** الألواح الشمسية هي المكون الرئيس في أنظمة الطاقة الشمسية التي تقوم بتوليد الكهرباء، وتصنع الخلايا من مواد شبه موصلة مثل السيليكون تمتص الضوء من الشمس. ما أبعاد اللوح الشمسي بدلالة  $x$ ، إذا كانت المساحة  $3x(x - 4) - 22(x - 4)$  أمتار مربعة؟



- 24 **طائر الفلامنكو:** طائر الفلامنكو، من جنس النحاميات وهو من الطيور المهاجرة التي تمتاز بشكلها الجميل ولونها الوردي، وتقطع مسافات بعيدة في أثناء موسم الهجرة السنوي مروراً بمنطقة الأهوار جنوب العراق لتحصل على الغذاء من المسطحات المائية. إذا كانت مساحة المسطح المائي الذي غطته طيور الفلامنكو في أحد الأهوار  $4y^2 + 14y + 7(2y + 7)$  أمتار مربعة. فما شكل المسطح وما أبعاده بدلالة  $y$  ؟



- 25 **ساعة بغداد:** ساعة بغداد هي مبنى مرتفع تعلوه ساعة معلقة على برج لها أربعة أوجه، يقع المبنى ضمن منطقة ساحة الاحتفالات في بغداد وأنشئت في سنة 1994م. ما نصف قطر الدائرة الداخلية للساعة بدلالة  $z$  إذا علمت أن مساحتها  $z^2\pi - 3z\pi - \pi(3z - 9)$  ؟

## فكّر

- 26 **تحذّر:** حلّ المقدار التالي إلى أبسط صورة:

$$5x^5y + 7y^3z - 10x^5z - 14z^2y^2$$

- 27 **أصحّ الخطأ:** كتبت ابتسام ناتج تحليل المقدار التالي كما يأتي:

$$\sqrt{2}t^4 - \sqrt{24}t^3 + t^2 - \sqrt{12}t = (t + 2\sqrt{3})(\sqrt{2}t^2 - t)$$

اكتشف خطأ ابتسام وصحّحه.

$$x^2 + 3x + 5x + 15 = (x + 3)(x + \boxed{\phantom{00}})$$

- 28 **حسّ عدديّ:** ما العدد المجهول في المقدار

ناتج طرح المقدار  $(x - y)(x + y)$  من المقدار  $(x + y)(x + y)$  بأبسط صورة.

## أكتب



# الدرس [2-3]

## تحليل المقدار الجبري بالمتطابقات

## Factoring the Algebraic Expression by using Special Identities

### تعلم



يعد ملعب الشعب الدولي في العاصمة العراقية بغداد من الملاعب المهمة في العراق إذ أنشئ عام 1966. إذا كانت مساحة الساحة المخصصة لكرة القدم التي تتوسط أرضيته يمثلها المقدار  $x^2 - 400$  متر مربع، فما أبعاد الساحة؟

### فكرة الدرس

• تحليل المقدار الجبري  
• كفرق بين مربعين  
• ومربع الكامل.

### المفردات

• فرق بين مربعين  
• مربع كامل  
• الحد العام  
• إكمال المربع  
• الحد المفقود

## [2-3-1] تحليل المقدار الجبري بالفرق بين مربعين

## Factoring the algebraic expression by difference of two squares

تعرفت سابقاً الى كيفية إيجاد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري آخر الأول يمثل مجموع حدين والآخر يمثل الفرق بينهما والناتج يمثل الفرق بين مربعيهما، والآن سوف تتعلم العملية العكسية لعملية الضرب وهي تحليل المقدار الجبري الذي على صورة فرق بين مربعين  $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$ .

المقدار  $x^2 + y^2$  لا يتحلل في هذه المرحلة.

### مثال (1)

جد أبعاد ساحة كرة القدم التي مساحتها  $x^2 - 400$  متر مربع.

$$x^2 - 400 = (x)^2 - (20)^2$$

$$= (x + 20)(x - 20)$$

اكتب كل حد على هيئة مربع كامل

اكتب التحليل

القوس الأول: الجذر التربيعي للحد الأول + الجذر التربيعي للحد الثاني

القوس الثاني: الجذر التربيعي للحد الأول - الجذر التربيعي للحد الثاني

لذا طول ساحة كرة القدم  $x + 20$  متراً وعرضها  $x - 20$  متراً

### مثال (2)

حلل كل مقدار من المقادير التالية كفرق بين مربعين:

$$i) x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

$$ii) 36y^2 - z^2 = (6y + z)(6y - z)$$

$$iii) 49 - v^2 = (7 + v)(7 - v)$$

$$iv) 2x^2 - z^2 = (\sqrt{2}x + z)(\sqrt{2}x - z)$$

$$v) 5h^2 - 7v^2 = (\sqrt{5}h + \sqrt{7}v)(\sqrt{5}h - \sqrt{7}v)$$

$$vi) 12 - t^2 = (2\sqrt{3} + t)(2\sqrt{3} - t)$$

$$vii) 8x^3y - 2xy^3 = 2xy(4x^2 - y^2)$$

$$= 2xy(2x + y)(2x - y)$$

التحليل باستعمال العامل المشترك

التحليل باستعمال الفرق بين المربعين

$$viii) \frac{1}{16}z^4 - \frac{1}{81} = \left(\frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{9}\right) = \left(\frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}z - \frac{1}{3}\right)$$



## Factoring the algebraic expression by perfect square

تعلمت سابقاً كيفية إيجاد ناتج ضرب مربع مجموع حدين ومربع الفرق بين حدين وكان الناتج مؤلفاً من ثلاثة حدود، والآن سوف تتعلم العملية العكسية للضرب وهي تحليل مقدار مؤلف من ثلاثة حدود على صورة مربع كامل

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2, \quad x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

يكون المقدار الجبري  $ax^2 \pm bx + c$  مربعاً كاملاً، إذا كان:  $(c) \quad bx = \pm 2\sqrt{(ax^2)}$  حيث  $a \neq 0$

**مثال (3)** حل كل مقدار من المقادير التالية التي على صورة مربع كامل:

i)  $x^2 + 6x + 9 = (x)^2 + 2(x \times 3) + (3)^2$

اكتب الحد الأول والحد الأخير على هيئة مربع كامل

اكتب الحد الأوسط على هيئة ضعف جذر الحد الأول في جذر الحد الأخير

$$= (x + 3)(x + 3)$$

اكتب تحليل المقدار

$$= (x + 3)^2$$

التحليل النهائي على هيئة  $(\text{جذر الحد الأخير} + \text{جذر الحد الأول})^2$

ii)  $y^2 - 4y + 4 = (y)^2 - 2(y \times 2) + (2)^2$

$$= (y - 2)^2$$

لاحظ الإشارة بين العددين هي إشارة الحد الأوسط

iii)  $16z^2 - 8z + 1 = (4z)^2 - 2(4z \times 1) + (1)^2 = (4z - 1)^2$

**مثال (4)** حدد أيّ مقدار من المقادير التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلّله:

i)  $x^2 + 10x + 25$

$$(x)^2 \quad | \quad (5)^2$$

$$2(x)(5) = 10x \quad \text{مربع كامل}$$

$$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$$

ii)  $y^2 + 14y + 36$

$$(y)^2 \quad | \quad (6)^2$$

$$2(y)(6) = 12y \neq 14y \quad \text{ليست مربعاً كاملاً}$$

iii)  $4 - 37v + 9v^2$

$$(2)^2 \quad | \quad (3v)^2$$

$$-2(2)(3v) = -12v \neq -37v$$

ليست مربعاً كاملاً

iv)  $9h^2 - 6h + 3$

$$(3h)^2 \quad | \quad (\sqrt{3})^2$$

$$-2(3h)(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}h \neq -6h$$

ليست مربعاً كاملاً

**مثال (5)** اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري  $ax^2 + bx + c$  ليصبح مربعاً كاملاً وحلّله:

i)  $25x^2 - \dots + 49$

لتصبح مربعاً كاملاً نطبق قانون الحد الأوسط  $(c) \quad bx = \pm 2\sqrt{(ax^2)}$

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)} \quad (c) \Rightarrow bx = 2\sqrt{(25x^2)(49)} \Rightarrow bx = 70x$$

$$\Rightarrow 25x^2 - 70x + 49 = (5x - 7)^2$$

ii)  $\dots + 8x + 16$

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)} \quad (c) \Rightarrow 8x = 2\sqrt{(ax^2)(16)} \Rightarrow 64x^2 = 4 \times 16 \times ax^2 \Rightarrow ax^2 = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$

iii)  $y^2 + 14y + \dots$

$$by = 2\sqrt{(ay^2)} \quad (c) \Rightarrow 14y = 2\sqrt{(y^2)(c)} \Rightarrow 196y^2 = 4 \times y^2 \times c \Rightarrow c = 49$$

$$\Rightarrow y^2 + 14y + 49 = (y + 7)^2$$



## تأكّد من فهمك

حلل كل مقدار من المقادير التالية كفرق بين مربعين:

1  $x^2 - 16$

2  $36 - 4x^2$

3  $h^2 - v^2$

الأسئلة (1 - 6)

4  $9m^2 - 4n^2$

5  $27x^3z - 3xz^3$

6  $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{16}$

مشابهة للمثال (2)

حلل كل مقدار من المقادير التالية كمربع كامل:

7  $y^2 - 8y + 16$

8  $9z^2 - 6z + 1$

الأسئلة (7 - 10)

9  $v^2 + 2\sqrt{3}v + 3$

10  $4h^2 - 20h + 25$

مشابهة للمثال (3)

حدد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلّه:

11  $x^2 + 18x + 81$

12  $16 - 14v + v^2$

الأسئلة (11 - 14)

13  $64h^2 - 48h - 9$

14  $3 - 4\sqrt{3}t + 4t^2$

مشابهة للمثال (4)

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري  $ax^2 + bx + c$  ليصبح مربعاً كاملاً وحلّه:

15  $.... + 14y + 49$

16  $z^2 + 4z + .....$

الأسئلة (15 - 18)

17  $3 - ..... + 9x^2$

18  $4x^2 + 2\sqrt{5}x + ...$

مشابهة للمثال (5)

## تدرب وحلّ التمرينات

حلّل كل مقدار من المقادير التالية إلى أبسط صورة:

19  $25 - 4x^2$

20  $y^2 - 121$

21  $12 - 3t^2$

22  $8y^3x - 2x^3y$

23  $\frac{1}{3}z^5 - \frac{1}{12}z$

24  $4x^2 + 20x + 25$

25  $16n^2 + 8\sqrt{3}n + 3$

26  $4t^3 - 12t^2 + 9t$

حدّد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلّه:

27  $4x^2 + 18x + 16$

28  $y^2 + 10y + 25$

29  $2h^2 - 12h - 18$

30  $4v^2 + 4v + 4$

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري  $ax^2 + bx + c$  ليصبح مربعاً كاملاً وحلّه:

31  $y^2 + .... + 36$

32  $25 - 20x + ....$

33  $5 - ..... + 16x^2$

34  $81 + 18z + ....$

## تدرب وحل مسائل حياتية



35 **المئذنة الملوية:** تقع منارة المئذنة الملوية في مدينة سامراء العراقية، وتعد إحدى معالم العراق المميزة بسبب شكلها الفريد، فهي إحدى آثار العراق القديمة المشهورة التي تعود لعصر حكم الدولة العباسية، وترتكز على قاعدة مربعة مساحتها  $x^2 - 8x + 16$  متراً مربعاً. ما طول ضلع القاعدة التي تستند عليها الملوية بدلالة  $x$  ؟



36 **مزرعة أبقار:** لدى سعد مزرعة أبقار مربعة الشكل طول ضلعها  $x$  متر، وسّعها لتصبح مستطيلة الشكل فأصبحت مساحة المزرعة  $x^2 - 81$  متراً مربعاً، ما طول المزرعة وعرضها بعد التوسعة بدلالة  $x$  ؟



37 **لوحة فنية:** رسم بشار لوحة فنية تمثل منطقة الأهوار في جنوب العراق، فكان المقدار  $4x^2 - 8x + 9$  سنتمترات مربعة يمثل مساحة اللوحة الفنية. أيُمثل مقدار مساحة اللوحة الفنية مربعاً كاملاً أم لا ؟

## فكر

38 **تحذ:** هل المقدار التالي يمثل مربعاً كاملاً أم لا؟ مَعْلًا إجابتك.

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{16}$$

39 **أصح الخطأ:** قالت منتهى إن المقدار  $(2x+1)(2x-1)$  هو تحليل للمربع الكامل  $4x^2 - 4x + 1$ . حدّد خطأ منتهى وصحّحه.

40 **حسّ عددي:** أيُمثل المقدار  $9x^2 + 12x - 4$  مربعاً كاملاً أم لا ؟ وضّح إجابتك.

## أكتب

تحليل للمقدار  $4x^2 - 8x + 4$ .



## الدرس [2-4]

### تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة

### Factoring the Algebraic Expression of three terms by Probe and Error



#### تعلم

الثور المجنح الآشوري (شيدو لاماسو) هكذا يرد اسمه في الكتابات الآشورية، وأصل كلمة لاماسو هو من لامو و Lammu السومرية ويوجد تمثال له في متحف مدينة الموصل. ما أبعاد اللوحة الفنية للثور المجنح التي مساحتها  $x^2 + 10x + 21$  سنتماً مربعاً؟

#### فكرة الدرس

- تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود باستعمال التجربة

#### المفردات

- الوسطان
- الطرفان
- الحد الأوسط

### [2-4-1] تحليل المقدار الجبري $x^2+bx+c$

### Factoring the algebraic expression $x^2+bx+c$

تعرفت سابقاً الى كيفية إيجاد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري آخر كل منهما مكوّن من حدين:

$$\text{i) } (x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6, \quad \text{ii) } (x+3)(x-5) = x^2 - 2x - 15, \quad \text{iii) } (x-1)(x-4) = x^2 - 5x + 4$$

والآن سوف تتعلم العملية العكسية لعملية الضرب وهي تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود  $x^2+bx+c$  باستعمال التجربة. ولتحليل المقدار الجبري، نجد عددين حقيقيين  $n, m$  بحيث  $n + m = b$  ،  $nm = c$  ونكتب

$$x^2 + bx + c = (x + n)(x + m)$$

**مثال (1)** ما أبعاد اللوحة الفنية للثور المجنح التي مساحتها  $x^2 + 10x + 21$  سنتماً مربعاً؟  
لتحليل المقدار الجبري نتبع الخطوات الآتية:

$$\begin{array}{r} + 7x \text{ حاصل ضرب الطرفين} \\ + 3x \text{ حاصل ضرب الوسطين} \\ \hline + 10x \text{ الحد الأوسط} \end{array} \quad \text{بالجمع}$$

$$x^2 + 10x + 21 = (x + 3)(x + 7)$$

الطرفين  
الوسطين

| عوامل العدد 21 | مجموع العاملين      |
|----------------|---------------------|
| (1) (21)       | $1 + 21 = 22$       |
| (3) (7)        | $3 + 7 = 10$        |
| (-3) (-7)      | $(-3) + (-7) = -10$ |

عرض اللوحة الفنية هو  $x+3$  سنتماً

طول اللوحة الفنية هو  $x+7$  سنتماً

**ملاحظة:** أهملت عوامل العدد  $21 = (-3)(-7)$  لأن إشارة الحد الوسط موجبة.

### حلل المقدار الجبري: $y^2 + y - 12$

### مثال (2)

$$\begin{array}{r} + 4y \text{ حاصل ضرب الطرفين} \\ - 3x \text{ حاصل ضرب الوسطين} \\ \hline + y \text{ الحد الأوسط} \end{array} \quad \text{بالجمع}$$

$$y^2 + y - 12 = (y - 3)(y + 4)$$

| عوامل العدد -12 | مجموع العاملين |
|-----------------|----------------|
| (1) (-12)       | $1 - 12 = -11$ |
| (12) (-1)       | $12 - 1 = 11$  |
| (2) (-6)        | $2 - 6 = -4$   |
| (6) (-2)        | $6 - 2 = 4$    |
| (3) (-4)        | $3 - 4 = -1$   |
| (4) (-3)        | $4 - 3 = 1$    |

### مثال (3) حلل المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

- i)  $z^2 - z - 6 = (z - 3)(z + 2)$  الحد الأوسط  $2z - 3z = -z$
- ii)  $x^2 - 9x + 18 = (x - 3)(x - 6)$  الحد الأوسط  $-6x - 3x = -9x$
- iii)  $y^2 + 6y - 27 = (y + 9)(y - 3)$  الحد الأوسط  $-3y + 9y = +6y$
- iv)  $15 - 8z + z^2 = (5 - z)(3 - z)$  الحد الأوسط  $-5z - 3z = -8z$

### [2-4-2] تحليل المقدار الجبري $ax^2+bx+c$ وإن $a \neq 0$

#### Factoring the algebraic expression $ax^2+bx+c$ and $a \neq 0$

الآن سوف نتعرف إلى كيفية تحليل مقدار جبري من ثلاثة حدود على الصورة  $ax^2+bx+c$  وإن  $a \neq 0$

### مثال (4) حلل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

- i)  $6x^2 + 17x + 7$   
 نجد عوامل العددين 6 ، 7 وكما يأتي:  
 $6 = \begin{cases} (1)(6) \\ (2)(3) \end{cases}, 7 = (1)(7)$   
 $(1)(6) \quad (1)(7) \Rightarrow (1)(1) + (6)(7) = 43$   
 $(1)(7) + (6)(1) = 13$   
 $(2)(3) \quad (1)(7) \Rightarrow (2)(1) + (3)(7) = 23$   
 $(2)(7) + (3)(1) = 17$   
 $6x^2 + 17x + 7 = (2x + 1)(3x + 7)$
- ii)  $7y^2 - 26y - 8$   
 نجد عوامل العددين 8 ، 7 وكما يأتي:  
 $8 = \begin{cases} (1)(8) \\ (2)(4) \end{cases}, 7 = (1)(7)$   
 $(1)(1) - (8)(7) = -55$   
 $(1)(7) - (8)(1) = -1$   
 $(2)(1) - (4)(7) = -26$   
 $(2)(7) - (4)(1) = 10$   
 $7y^2 - 26y - 8 = (7y + 2)(y - 4)$

### مثال (5) حلل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

- i)  $3z^2 - 17z + 10 = (3z - 2)(z - 5)$  الحد الأوسط  $-15z - 2z = -17z$
- ii)  $4v^2 - v - 3 = (4v + 3)(v - 1)$  الحد الأوسط  $-4v + 3v = -v$
- iii)  $15 + 11h + 2h^2 = (5 + 2h)(3 + h)$  الحد الأوسط  $+5h + 6h = 11h$
- iv)  $6x^2 - 51x + 63 = 3(2x^2 - 17x + 21) = 3(x - 7)(2x - 3)$  الحد الأوسط  $-3x - 14x = -17x$



## تأكّد من فهمك

حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

1  $x^2 + 6x + 8$

2  $1 - 2z + z^2$

3  $x^2 - 13x + 12$

الأسئلة (1 - 6)

4  $3 + 2z - z^2$

5  $x^2 - 2x - 3$

6  $15 - 8z + z^2$

مشابهة للأمثلة (1,3)

حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

7  $2x^2 + 5x + 3$

8  $3y^2 - 14y + 8$

9  $3x^2 - 10x + 8$

الأسئلة (7 - 12)

10  $8 - 25z + 3z^2$

11  $5y^2 - y - 6$

12  $6 + 29z - 5z^2$

مشابهة للمثالين (4,5)

ضع الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً:

13  $x^2 + 9x + 20 = (x \dots 4)(x \dots 5)$

14  $y^2 - 12y + 20 = (y \dots 2)(y \dots 10)$

الأسئلة (13 - 16)

15  $6x^2 - 7x + 2 = (2x \dots 1)(3x \dots 2)$

16  $20 - 7y - 3y^2 = (5 \dots 3y)(4 \dots y)$

مشابهة للأمثلة (1,5)

## تدرب وحلّ التمرينات

حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

17  $x^2 + 9x + 14$

18  $y^2 - 5y + 6$

19  $x^2 - 2x - 3$

حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

20  $2x^2 + 12x - 14$

21  $4y^2 - 6y + 2$

22  $10 + 9z - 9z^2$

23  $2x^2 + 3x + 1$

24  $13y^2 - 11y - 2$

ضع الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً:

25  $x^2 + x - 20 = (x \dots 4)(x \dots 5)$

26  $35 + 3y - 2y^2 = (5 \dots y)(7 \dots 2y)$

## تدرب وحل مسائل حياتية



31 **قلعة الأخيضر:** هي قلعة أثرية تقع في محافظة كربلاء وسط العراق ولا تزال أطلال القلعة قائمة إلى يومنا هذا، الأخيضر من الحصون الدفاعية الفريدة من نوعها ويحيط به سور عظيم مستطيل الشكل. ما أبعاد السور الخارجية بدلالة  $x$ ، إذا كانت مساحة القلعة مع السور يمثلها المقدار  $6x^2 - 39x + 60$  متراً مربعاً؟



32 **ألعاب ترفيهية:** تعد أرجوحة ديسكفري من الألعاب الخطرة في مدينة الألعاب، ويمثل المقدار  $5t^2 + 5t - 30$  مسار أرجوحة ديسكفري في مدينة الألعاب، إذ يمثل  $t$  زمن الحركة. وتحليل المقدار يساعد على معرفة الوقت الذي تستغرقه أرجوحتها في المرة الأولى. حلل المقدار.



33 **مترو الأنفاق:** يعد مترو الأنفاق نظام سكك حديد تحت الأرض تسير عليه القطارات، وهو أحد وسائل النقل السريعة في المدن الكبيرة وذات الكثافة السكانية العالية، ويتألف كل قطار من عدة عربات، فإذا كان المقدار  $14y^2 - 23y + 3$  يمثل مساحة أرضية العربات بالمتر المربع، فما أبعادها بدلالة  $y$ ؟

## فكر

34 **تحذ:** حلل المقدار الجبري التالي إلى أبسط صورة:

$$4x^3 + 4x^2 - 9x - 9$$

35 **أصح الخطأ:** حلل سعد المقدار  $6z^2 - 16z - 6$  كما يأتي:

$$6z^2 - 16z - 6 = (3z - 1)(2z + 6)$$

اكتشف خطأ سعد وصححه.

36 **حس عددي:** أيمكن تحديد ما إذا كانت إشارات القوسين في تحليل المقدار  $x^2 - 12x + 35$  مختلفة أم متشابهة ومن دون تحليل المقدار؟ وضح إجابتك.

## اكتب

الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً:

$$6z^2 + 5z - 56 = (3z \dots 8)(2z \dots 7)$$



## الدرس [2-5]

### تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين أو الفرق بين مكعبين

Factoring the Algebraic Expression sum of two cubes or difference between two cubes



#### تعلم

مكعب روبيك هو لغز ميكانيكي ثلاثي الأبعاد اخترعه النحات وأستاذ العمارة المجرى إرنو روبيك عام 1974. ما مجموع حجمي مكعبي روبك الأول طول حرفه 3dcm والثاني طول حرفه 4dcm ؟

#### فكرة الدرس

• تحليل المقدار الجبري من حدين الذي على صورة مجموع (فرق بين) مكعبين.

#### المفردات

• مجموع مكعبين  
• فرق بين مكعبين

### [2-5-1] تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين

Factoring the algebraic expression sum of two cubes

تعلمت في الدرس الأول من هذا الفصل ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود وناتج ضربهما مقدار على صورة مجموع مكعبين مثل:  $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 + 8 = x^3 + 2^3$ ، والآن سوف تتعلم العملية العكسية وهي تحليل المقدار الجبري المؤلف من حدين والذي على صورة مجموع مكعبين:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \quad \text{حيث} \quad x = \sqrt[3]{x^3}, \quad y = \sqrt[3]{y^3}$$

#### مثال (1)

من تعلم، ما مجموع حجمي مكعبي روبك الأول طول حرفه 3 dcm والثاني طول حرفه 4 dcm ؟

$$v_1 + v_2 = 3^3 + 4^3$$

$$= (3 + 4)(3^2 - 3 \times 4 + 4^2)$$

$$= 7(9 - 12 + 16) = 7 \times 13 = 91 \text{dcm}^3$$

حجم المكعب = الطول × العرض × الارتفاع = (طول الحرف)<sup>3</sup>

قانون تحليل مجموع مكعبين

#### مثال (2)

حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

$$\text{i) } x^3 + 5^3 = (x + 5)(x^2 - 5x + 5^2)$$

$$\text{ii) } y^3 + 8 = y^3 + 2^3 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$$

$$\text{iii) } 8z^3 + 27 = 2^3z^3 + 3^3 = (2z)^3 + 3^3 = (2z + 3)(4z^2 - 6z + 9)$$

$$\text{iv) } \frac{1}{a^3} + \frac{1}{64} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{4^3} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{4a} + \frac{1}{16}\right)$$

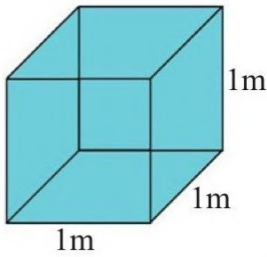
$$\text{v) } \frac{27}{x^3} + \frac{8}{125} = \frac{3^3}{x^3} + \frac{2^3}{5^3} = \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{5}\right)\left(\frac{9}{x^2} - \frac{6}{5x} + \frac{4}{25}\right)$$

$$\text{vi) } \frac{1}{2}t^3 + 4 = \frac{1}{2}(t^3 + 8) = \frac{1}{2}(t^3 + 2^3) = \frac{1}{2}(t + 2)(t^2 - 2t + 4)$$

$$\text{vii) } 0.008 + v^3 = (0.2)^3 + v^3 = (0.2 + v)(0.04 - 0.2v + v^2)$$

## Factoring the algebraic expression difference between two cubes

تعلمت في الدرس الأول من هذا الفصل ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود وناتج ضربهما مقدار على صورة فرق بين مكعبين مثل:  $x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ ، والآن سوف نتعلم العملية العكسية وهي تحليل المقدار الجبري المؤلف من حدين والذي على صورة فرق بين مكعبين:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) \quad \text{حيث} \quad x = \sqrt[3]{x^3}, \quad y = \sqrt[3]{y^3}$$


## مثال (3)

حوض مكعب الشكل طول حرفه 1m مملوء بالماء، أُفْرِغَ الماء منه

في حوض آخر أكبر منه مكعب الشكل طول حرفه 1.1m .

ما كمية الماء الإضافية التي نحتاج إليها ليمتلئ الحوض الكبير؟

كمية الماء الإضافية اللازمة = حجم المكعب الكبير - حجم المكعب الصغير

$$v_2 - v_1 = (1.1)^3 - 1^3$$

$$= (1.1 - 1) ( (1.1)^2 + 1.1 \times 1 + 1^2 ) \quad \text{قانون تحليل الفرق بين مكعبين}$$

$$= 0.1 (1.21 + 1.1 + 1) = 0.1 \times 3.31 = 0.331 \text{ m}^3$$

## مثال (4)

حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

i)  $x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 3^2) = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

ii)  $y^3 - 64 = y^3 - 4^3 = (y - 4)(y^2 + 4y + 16)$

iii)  $27z^3 - 8 = 3^3z^3 - 2^3 = (3z)^3 - 2^3 = (3z - 2)(9z^2 + 6z + 4)$

iv)  $\frac{1}{b^3} - \frac{1}{125} = \frac{1}{b^3} - \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{5b} + \frac{1}{25}\right)$

v)  $\frac{1}{3}t^3 - 9 = \frac{1}{3}(t^3 - 27) = \frac{1}{3}(t^3 - 3^3) = \frac{1}{3}(t - 3)(t^2 + 3t + 9)$

vi)  $0.216 - n^3 = (0.6)^3 - n^3 = (0.6 - n)(0.36 + 0.6n + n^2)$

vii)  $1 - 0.125z^3 = 1 - (0.5)^3z^3 = (1 - 0.5z)(1 + 0.5z + 0.25z^2)$

viii)  $32 - \frac{1}{2}m^3 = \frac{1}{2}(64 - m^3) = \frac{1}{2}(4^3 - m^3) = \frac{1}{2}(4 - m)(16 + 4m + m^2)$



## تأكّد من فهمك

حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

1  $y^3 + 216$

3  $125 + 8z^3$

5  $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{64}$

7  $0.125 + v^3$

2  $x^3 + z^3$

4  $\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{8}$

6  $\frac{1}{3}t^3 + 9$

8  $1 + 0.008z^3$

الأسئلة (1 - 8)

مشابهة للمثالين (1,2)

حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

9  $a^3 - 8^3$

11  $\frac{1}{c^3} - \frac{1}{8}$

13  $0.125 - m^3$

15  $3b^3 - 81$

10  $8y^3 - 64$

12  $\frac{1}{2}v^3 - 4$

14  $25 - \frac{1}{5}n^3$

16  $0.216v^3 - 0.008t^3$

الأسئلة (9 - 16)

مشابهة للمثالين (3,4)

## تدرب وحلّ التمرينات

حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

17  $6^3 + x^3$

18  $125y^3 + 1$

19  $\frac{1}{64} + \frac{8}{125}y^3$

20  $\frac{1}{5}v^3 + 25$

21  $0.125x^3 + 0.008y^3$

حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

22  $y^3 - 64$

23  $\frac{1}{x^3} - \frac{27}{8}$

24  $9 - \frac{1}{3}n^3$

25  $25c^3 - \frac{1}{5}$

26  $0.001x^3 - 0.008y^3$

## تدرب وحل مسائل حياتية



- 27 **مكتبة:** مكتبة مدينة شتوتغارت هي واحدة من أجمل المكتبات في العالم وأفخمها وتقع في ألمانيا، كما أنها من أكثر المكتبات تماشياً مع متطلبات التعليم الحديثة. بناية المكتبة على شكل مكعب طول حرفه  $13\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y^3$  متر. حلّ المقدار الذي يمثل طول حرفه.



- 28 **حوض سمك:** حوض سمك الزينة حجمه  $25x^3$  متراً مكعباً، وُضِعَ في داخله حجر مكعب الشكل حجمه  $\frac{1}{5}$  متر مكعب، مُلِئَ بالماء كاملاً. اكتب المقدار الذي يمثل حجم الماء ثم حلّله؟



- 29 **سكن:** بدأت المنازل تأخذ أشكالاً مختلفة في التصميم مع تطور هندسة العمارة فصُمِّمَت هذه المنازل على شكل مكعبات. فإذا كان حجم المنزل الأول  $\frac{8}{a^3}$  متر مكعب، وحجم المنزل الثاني  $\frac{27}{b^3}$  متر مكعب. اكتب حجم المنزلين معاً ثم حلّ المقدار.

## فكّر

- 30 **تحذّر:** حل المقدار الجبري التالي إلى أبسط صورة:

$$0.002z^3 - 0.016y^3$$

- 31 **أصحّ الخطأ:** حلّلت بشرى المقدار  $8v^3 - 0.001$  كما يأتي:

$$8v^3 - 0.001 = (2v + 0.1)(4v^2 - 0.4v + 0.01)$$

اكتشف خطأ بشرى وصحّحه.

- 32 **حسّ عدديّ:** هل يمكن جمع العددين 27 ، 8 بطريقة تحليل مجموع مكعبين؟ وضّح إجابتك.

## أكتب

الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً:

$$125 - x^3 = (5 \dots x)(25 \dots 5x \dots x^2)$$



# الدرس [2-6]

## تبسيط المقادير الجبرية النسبية

### Simplifying Rational Algebraic Expressions



#### تعلم

اشترى حسن مجموعة من باقات الزهور بمبلغ  $x^2 - x - 6$  دينار، فكانت كلفة باقة الزهور الواحدة عليه  $2x - 6$  دينار. اكتب نسبة ثمن الباقة الواحدة إلى الثمن الكلي لباقات الزهور وبأبسط صورة.

#### فكرة الدرس

- ضرب المقادير الجبرية النسبية وقسمتها وكتابتها بأبسط صورة.
- جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها وكتابتها بأبسط صورة.

#### المفردات

- النسبة ، الكسر

### [2-6-1] تبسيط ضرب المقادير الجبرية النسبية وقسمتها

#### Simplifying multiplying and dividing rational algebraic expressions

تعرفت سابقاً إلى خواص الأعداد النسبية والحقيقية وتعلمت كيفية تبسيط الجُمْل العددية باستعمال المضاعف المشترك الأصغر وترتيب العمليات، والآن سوف نتعلم كيفية تبسيط المقادير الجبرية النسبية (الكسرية) وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على عامل مشترك، وتكرار الأمر بحيث لا يبقى مجال لذلك، وعندئذ نقول إنَّ المقدار على أبسط صورة (simplest form).

#### مثال (1)

أكتب نسبة ثمن باقة الزهور الواحدة إلى الثمن الكلي لباقات بأبسط صورة.

$$\frac{\text{ثمن باقة الزهور}}{\text{ثمن الباقات الكلية للزهور}} = \frac{2x - 6}{x^2 - x - 6} = \frac{2(x - 3)}{(x - 3)(x + 2)}$$

$$= \frac{2\cancel{(x - 3)}}{\cancel{(x - 3)}(x + 2)} = \frac{2}{x + 2}$$

حلّ البسط والمقام

بقسمة كل من البسط والمقام على العامل المشترك

#### مثال (2)

أكتب كلَّ مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

$$i) \frac{x^2 - 4}{(x^2 - 4x + 4)} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)^2} = \frac{(x + 2)\cancel{(x - 2)}}{(x - 2)\cancel{(x - 2)}} = \frac{x + 2}{x - 2}$$

$$ii) \frac{5z + 10}{z - 3} \times \frac{z^3 - 27}{(z^2 + 6z + 8)} = \frac{5\cancel{(z + 2)}}{\cancel{z - 3}} \times \frac{\cancel{(z - 3)}(z^2 + 3z + 9)}{\cancel{(z + 2)}(z + 4)} = \frac{5(z^2 + 3z + 9)}{z + 4}$$

$$iii) \frac{16 - x^2}{3x + 5} \times \frac{(3x^2 + 2x - 5)}{(x^2 + 3x - 4)} = \frac{(4 + x)(4 - x)}{\cancel{(3x + 5)}} \times \frac{\cancel{(3x + 5)}\cancel{(x - 1)}}{\cancel{(x + 4)}(x - 1)} = 4 - x$$

$$iv) \frac{8 + t^3}{4 - 2t + t^2} \div \frac{(2 + t)^3}{t^2 + 9t + 14} = \frac{8 + t^3}{4 - 2t + t^2} \times \frac{t^2 + 9t + 14}{(2 + t)^3}$$

$$= \frac{\cancel{(2 + t)}(4 - \cancel{2t} + t^2)}{(4 - \cancel{2t} + t^2)} \times \frac{\cancel{(t + 2)}(t + 7)}{(2 + t)^3} = \frac{t + 7}{2 + t} = \frac{t + 7}{t + 2}$$

إضرب الأول في مقلوب الثاني

حلّ البسط والمقام وقسم على العامل المشترك

## Simplifying adding and subtracting rational algebraic expressions

تعلمت سابقاً كيفية تحليل المقادير الجبرية وكذلك كيفية إيجاد مضاعف مشترك أصغر ( LCM ): يمثل حاصل ضرب العوامل المشتركة بأكبر أس وغير المشتركة) عند تبسيط جمل عددية كسرية، والآن سوف نتعلم كيفية تبسيط جمع المقادير الجبرية النسبية (الكسرية) وطرحها وذلك بتحليل كل من بسط ومقام الكسر إلى أبسط صورة ثم إجراء عملية جمع وطرح المقادير الكسرية باستعمال المضاعف المشترك وتبسيط المقدار على أبسط صورة (simplest form).

## مثال (3) أكتب المقدار الجبري النسبي بأبسط صورة:

$$\frac{y^2}{(y+2)} - \frac{4}{(y+2)}$$

$$= \frac{y^2 - 4}{(y+2)}$$

$$= \frac{(y+2)(y-2)}{(y+2)} = y - 2$$

المضاعف المشترك الأصغر (y + 2)

تحليل البسط على صورة فرق بين مربعين

بقسمة كل من البسط والمقام على y + 2

## مثال (4) أكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

$$i) \frac{7x - 14}{x^2 - 4} + \frac{5}{(x+2)} = \frac{7(x-2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{5}{x+2}$$

$$= \frac{7}{x+2} + \frac{5}{x+2}$$

$$= \frac{7+5}{x+2} = \frac{12}{x+2}$$

بتحليل البسط والمقام

المضاعف المشترك الأصغر (x + 2)

$$ii) \frac{4z}{2z-5} - \frac{z}{z+3} = \frac{4z}{2z-5} \times \left(\frac{z+3}{z+3}\right) - \frac{z}{z+3} \times \left(\frac{2z-5}{2z-5}\right)$$

$$= \frac{4z(z+3) - z(2z-5)}{(2z-5)(z+3)} = \frac{2z^2 + 17z}{(2z-5)(z+3)} = \frac{z(2z+17)}{(2z-5)(z+3)}$$

المضاعف المشترك الأصغر

(2z - 5) (z + 3)

$$iii) \frac{t^2 + 2t + 4}{t^3 - 8} + \frac{12}{3t - 6} = \frac{t^2 + 2t + 4}{(t-2)(t^2 + 2t + 4)} + \frac{12}{3(t-2)} = \frac{1}{(t-2)} + \frac{4}{(t-2)} = \frac{5}{(t-2)}$$

$$iv) \frac{8}{v+4} + \frac{2}{v-4} - \frac{1}{v^2-16} = \frac{8}{v+4} + \frac{2}{v-4} - \frac{1}{(v+4)(v-4)} = \frac{8(v-4) + 2(v+4) - 1}{(v+4)(v-4)}$$

$$= \frac{8v - 32 + 2v + 8 - 1}{(v+4)(v-4)} = \frac{10v - 25}{(v+4)(v-4)} = \frac{5(2v-5)}{(v+4)(v-4)}$$



## تأكّد من فهمك

أكتب كلّ مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

$$1 \quad \frac{2z^2 - 4z + 2}{z^2 - 7z + 6}$$

$$2 \quad \frac{y^3 + 27}{y^3 - 3y^2 + 9y}$$

الأسئلة (1 - 6)

$$3 \quad \frac{5x + 3}{x + 3} \times \frac{x^2 + 5x + 6}{25x^2 - 9}$$

$$4 \quad \frac{z^2 + 7z - 8}{z - 1} \times \frac{z^2 - 4}{z^2 + 6z - 16}$$

مشابهة للمثالين (1,2)

$$5 \quad \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 4} \times \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 6}$$

$$6 \quad \frac{2y^2 - 2y}{y^2 - 9} \div \frac{y^2 + y - 2}{y^2 + 2y - 3}$$

أكتب كلّ مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

$$7 \quad \frac{2}{x^2 - 9} + \frac{3}{x^2 - 4x + 3}$$

$$8 \quad \frac{2y^3 - 128}{y^3 + 4y^2 + 16y} - \frac{y - 1}{y}$$

الأسئلة (7 - 12)

$$9 \quad \frac{z^2 + z + 1}{z^4 - z} - \frac{z + 3}{z^2 + 2z - 3}$$

$$10 \quad \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} - 1$$

مشابهة للمثالين (3,4)

$$11 \quad \frac{3}{z - 1} + \frac{2}{z + 3} + \frac{8}{z^2 + 2z - 3}$$

$$12 \quad \frac{y - 3}{y - 1} + \frac{5y - 15}{(y - 3)^2} - \frac{3y + 1}{y^2 - 4y + 3}$$

## تدرب وحلّ التمرينات

أكتب كلّ مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

$$13 \quad \frac{x + 5}{12x} \times \frac{6x - 30}{x^2 - 25}$$

$$14 \quad \frac{3 - x}{4 - 2x} \times \frac{x^2 + x - 6}{9 - x^2}$$

$$15 \quad \frac{y^2 - 7y}{y^3 - 27} \div \frac{y^2 - 49}{y^2 + 3y + 9}$$

أكتب كلّ مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

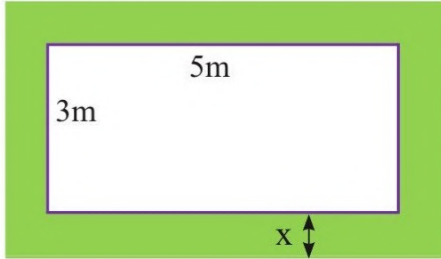
$$16 \quad \frac{5}{x^2 - 36} - \frac{2}{x^2 - 12x + 36}$$

$$17 \quad \frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x - 2} + \frac{4 + 2x + x^2}{x^3 - 8}$$

## تدرب وحل مسائل حياتية



- 18 **مكتبة:** إذا كان المقدار الجبري  $x^2 - 4$  يمثل عدد الكتب العلمية في المكتبة، والمقدار الجبري  $x^2 + x - 6$  يمثل عدد الكتب الأدبية فيها. اكتب نسبة الكتب العلمية إلى الكتب الأدبية بأبسط صورة.



- 19 **هندسة:** مستطيل أبعاده 3 ، 5 أمتار وسّع إلى مستطيل أكبر وذلك بإحاطته بممر عرضه  $x$  متر. اكتب المقدار الجبري الذي يمثل مجموع نسبتي طول المستطيل قبل التوسيع إلى طوله بعد التوسيع ونسبة عرض المستطيل قبل التوسيع إلى عرضه بعد التوسيع بأبسط صورة.



- 20 **ألعاب نارية:** المقدار الجبري  $20 + 15t - 5t^2$  يمثل الارتفاع بالأمتار لقذيفة ألعاب نارية أُطلقت من سطح بناية ارتفاعها 20 متراً، إذ تمثل  $t$  زمن وصول القذيفة بالثواني إلى الهدف. والمقدار الجبري  $4 + 19t - 5t^2$  يمثل ارتفاع قذيفة أخرى أُطلقت من سطح بناية ارتفاعها 4 أمتار. اكتب نسبة ارتفاع القذيفة الأولى إلى ارتفاع القذيفة الثانية بأبسط صورة.

## فكر

- 21 **تحذّر:** بسّط المقدار الجبري التالي إلى أبسط صورة:

$$\frac{y^2 - 5}{2y^3 - 16} \div \frac{y - \sqrt{5}}{2y^2 + 4y + 8}$$

- 22 **أصحّ الخطأ:** بسّطت سماح المقدار الجبري وكتبتة بأبسط صورة كما يأتي:

$$\frac{z^2 - z - 30}{5 + z} \times \frac{2z + 12}{z^2 - 36} = 1$$

اكتشف خطأ سماح وصحّحه.

- 23 **حسّ عدديّ:** ما ناتج جمع المقدارين الجبريين بدون استعمال الورقة والقلم؟ وضّح إجابتك.

$$\frac{5}{x^2 - 49} + \frac{-4}{(x - 7)(x + 7)}$$

## أكتب

$$\frac{z^2 + z - 6}{2z^2 + 2z - 12} \div \frac{z^2 - 16}{2z + 8}$$

قيمة المقدار الجبري بأبسط صورة



جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

1  $(x + 5)^2$       2  $(v - \sqrt{2})(v + \sqrt{2})$       3  $(2 - x)(5 - x)$       4  $(2y - 3)(y + 9)$

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

5  $(x + 11)(x^2 - 11x + 121)$       6  $(\frac{1}{3} - y)(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}y + y^2)$

7  $(y - 1)^3$       8  $(z + \frac{1}{4})^3$

حلل المقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل:

9  $8x^2 - 12x$       10  $7y^3 + 14y^2 - 21y$       11  $\sqrt{18}z^3r + \sqrt{2}(zr^2 - zr)$

حلل المقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

12  $\frac{2}{3}(y+5) + \frac{1}{3}y(y+5)$       13  $\sqrt{5}z(z^2 - 1) - \sqrt{2}z^2(z^2 - 1)$

حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع:

14  $6x^4 - 18x^3 + 10x - 30$       15  $56 - 8y + 14y^2 - 2y^3$

حلل المقدار بالتجميع مع المعكوس:

16  $9x^3 - 6x^2 + 8 - 12x$       17  $\sqrt{11}z^3 - \sqrt{44}z^2 + 5(2 - z)$

حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية:

18  $16 - x^2$       19  $\frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{27}$       20  $\frac{1}{16}v - \frac{1}{2}v^4$

21  $8x^3 - \frac{1}{125}$       22  $81 - 18y + y^2$       23  $7z^2 - 36z + 5$

حدد أي من المقادير الجبرية التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلله:

24  $25x^2 + 30x + 9$       25  $49 - 14y + y^2$       26  $4v^2 + 4\sqrt{5}v + 5$

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري  $ax^2 + bx + c$  ليصبح مربعاً كاملاً وحلله:

27  $x^2 + \dots + 81$       28  $36 - 12y + \dots$       29  $7 - \dots + 4z^2$

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية:

30  $x^2 + 7x + 10$       31  $x^2 - 5\sqrt{3}x + 18$       32  $2v^2 + 9v + 7$

33  $32 - 16x + 2x^2$       34  $\frac{1}{4}y^2 - 2y + 3$       35  $12 - 7\sqrt{2}v + 2v^2$

36  $8 + 27x^3$       37  $125y^3 - 1$       38  $\frac{1}{v^3} - \frac{8}{27}$

39  $1 + 0.125y^3$       40  $z^3 - 0.027$       41  $3 - \frac{1}{9}v^3$

اكتب كل مقدار من المقادير التالية على أبسط صورة:

42  $\frac{27 - 8z^3}{4z^2 - 9} \div \frac{9 + 6z + 4z^2}{9 + 6z}$       43  $\frac{7}{x^2 - 25} - \frac{6}{x^2 + 10x + 25}$

44  $\frac{y^2 - 1}{1 - y^3} + \frac{1 + y}{1 + 2y + y^2}$       45  $\frac{z + 3}{z + 5} - \frac{z - 5}{z - 3} + \frac{1}{z^2 + 2z - 15}$



## المعادلات

## Equations

- الدرس 3-1 حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين
- الدرس 3-2 حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد
- الدرس 3-3 حل المعادلات التربيعية بالتجربة
- الدرس 3-4 حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل
- الدرس 3-5 حل المعادلات بالقانون العام
- الدرس 3-6 حل المعادلات الكسرية
- الدرس 3-7 خطة حل المسألة (كتابة معادلة)

سافر باسل وسعد في رحلات سياحية عن طريق مطار بغداد الدولي فكانت مجموعة باسل تقل بـ 22 شخصاً عن مجموعة سعد، فإذا كان مجموع الأشخاص المسافرين 122 شخصاً، فيمكن حساب عدد الأشخاص لكل مجموعة وذلك بحل المعادلتين الخطيتين من الدرجة الأولى  $x + y = 122$  ،  $x - y = 22$  إذ المتغير  $x$  يمثل عدد الأشخاص في مجموعة سعد والمتغير  $y$  يمثل عدد الأشخاص في مجموعة باسل.



جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

1  $(y - 5)^2$

2  $(z + 2)(z - 2)$

3  $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$

4  $(4 - y)(6 - y)$

5  $(3z - 2)(z + 8)$

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

6  $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

7  $(\frac{1}{2} - y)(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}y + y^2)$

حلل المقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل:

8  $5x^2 - 10x$

9  $9y^3 + 6y^2 - 3y$

10  $\sqrt{12}z^2 + \sqrt{3}z$

حلل المقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

11  $x(5 - x) - 3(5 - x)$

12  $\frac{1}{2}(y + 1) + \frac{1}{2}y(y + 1)$

13  $\sqrt{3}z(z - 1) - \sqrt{2}(z - 1)$

حلل المقدار باستعمال التجميع:

14  $6x^3 - 12x^2 + 5x - 10$

15  $9 - 18y + 7y^2 - 14y^3$

16  $\sqrt{2}z^4 - \sqrt{6}z^3 + z - \sqrt{3}$

حلل المقدار بالتجميع مع المعكوس:

17  $4x^3 - 2x^2 + 3 - 6x$

18  $\frac{3}{4}y^3 - \frac{1}{4}y^2 + 4 - 12y$

19  $\sqrt{4}z^3 - \sqrt{25}z^2 + 3(5 - 2z)$

حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية:

20  $y^2 - 25$

21  $\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{8}$

22  $36 - 12x + x^2$

23  $y^2 - 2y - 15$

حدد أي من المقادير الجبرية التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلله:

24  $16x^2 + 40x + 25$

25  $64 - 16y + y^2$

26  $z^2 - 6z - 9$

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري  $ax^2 + bx + c$  ليصبح مربعاً كاملاً وحلله:

27  $x^2 + \dots + 64$

28  $9 - 24y + \dots$

29  $5 - \dots + 4z^2$

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية:

30  $18 - 3y - y^2$

31  $z^2 - 2\sqrt{3}z + 3$

32  $4 - 21x + 5x^2$

33  $1 + 27z^3$

34  $y^3 - 125$

35  $y^3 - \frac{1}{8}$

36  $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{64}$

37  $1 - 0.125z^3$

# الدرس [3-1]

## حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين

### Solving the system of two Linear Equations with two variables



#### تعلم

مجموع عمري ضياء مع أسامة ٤٠ سنة وقبل ٥ سنوات مضت كان عمر ضياء ٤ أمثال عمر أسامة، فكم عمر كل منهما الآن؟

#### فكرة الدرس

- حل نظام من معادلتين خطيتين بيانياً وبالتعويض وبالحدف .
- المفردات
- معادلة خطية
- نظام المعادلات الخطية
- حل النظام

### [3-1-1] حل نظام من معادلتين خطيتين بيانياً

#### Solving the system of two linear equations by graphic method

لتكن  $L_1 : a_1x + b_1y = c_1$  ،  $L_2 : a_2x + b_2y = c_2$  معادلتين من الدرجة الأولى (خطيتين) بمتغيرين  $x$  ،  $y$  ، لحل هذا النظام بيانياً نتبع ما يأتي: (1) تمثيل كل من المستقيمين في المستوي الإحداثي. (2) لإيجاد إحداثي نقطة تقاطع المستقيمين يُرسم عمودان من النقطة على المحورين الصادي والسيني فتكون نقطة التقاطع تمثل مجموعة الحل.

#### مثال (1)

جد مجموعة الحل للنظام بيانياً . (1)  $x - y = 1$  ... (2)  $x + y = 3$  ...

$$x + y = 3 \dots (2)$$

نمثل المعادلتين بيانياً ونحدد نقطة تقاطع المستقيمين (2,1)

لتمثيل المعادلات بيانياً نأخذ نقاط التقاطع مع المحاور

| المعادلة (1)       | المعادلة (2)       |
|--------------------|--------------------|
| $x \mid y = x - 1$ | $x \mid y = 3 - x$ |
| 0   -1             | 0   3              |
| 1   0              | 3   0              |

النقاط (1, 0) ، (0, -1)

النقاط (3, 0) ، (0, 3)

مجموعة الحل للنظام هي  $S = \{(2,1)\}$

**للتحقق من صحة الحل** نعوض عن قيمة المتغيرين  $x$  ،  $y$  في كلا المعادلتين للحصول على عبارتين صائبتين.

التعويض بالمعادلة (1)....  $x - y = 1 \rightarrow 2 - 1 = 1 \rightarrow 1 = 1$

التعويض بالمعادلة (2)....  $x + y = 3 \rightarrow 2 + 1 = 3 \rightarrow 3 = 3$

#### مثال (2)

من فقرة تعلم، لإيجاد عمر كل منهما:

نفرض ان عمر ضياء  $x$  ، وأن عمر أسامة  $y$

المعادلة التي تمثل مجموع عمريهما:

$$x + y = 40 \dots (1)$$

$$x \mid y = 40 - x$$

$$0 \mid 40$$

$$40 \mid 0$$

$$x \mid 4y = x + 15$$

$$-15 \mid 0$$

$$0 \mid 15$$

$$4$$

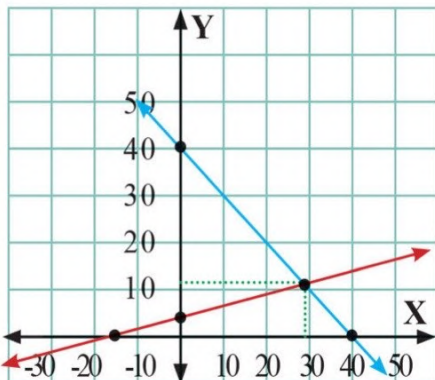
$$15$$

$$4$$

$$(x - 5) = 4(y - 5)$$

$$4y = x + 15 \dots (2)$$

المعادلة التي تمثل العلاقة بين عمريهما قبل ٥ سنوات



نمثل كل معادلة بيانياً بمستقيم كما في طريقة حل المثال (1) ونحدد نقطة تقاطع المستقيمين والتي تمثل عمر كل منهما وهي (29,11).



### [3-1-2] حل نظام من معادلتين خطيتين بالتعويض

#### Solving the system of two linear equations by substitution method

تتلخص هذه الطريقة لحل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين  $x, y$  ، نقوم بتحويل إحدى المعادلتين إلى معادلة بمتغير واحد فقط وذلك بإيجاد علاقة بين  $x, y$  من إحدى المعادلتين وتعويضها في المعادلة الأخرى.

#### مثال (3) جد مجموعة الحل للنظام باستعمال التعويض:

i)  $y = 4x$  ..... (1) } نعوض عن قيمة  $y$  من المعادلة (1) في المعادلة (2)  
 $y = x + 6$  ..... (2) } نحل المعادلة ونجد قيمة المتغير  $x$   
 $\Rightarrow 4x = x + 6$   
 $\Rightarrow 4x - x = 6 \Rightarrow x = 2$   
 $y = x + 6 \Rightarrow y = 2 + 6 \Rightarrow y = 8$  نعوض عن قيمة  $x$  بالمعادلة (2) لإيجاد قيمة المتغير  $y$   
 لذا مجموعة الحل للنظام هي  $\{(2, 8)\}$

ii)  $x + 8y = 10$  .... (1) } نجد قيمة  $x$  من المعادلة (2)  
 $x - 4y = 2$  ..... (2) } ونعوضها في المعادلة (1)  
 $2 + 4y + 8y = 10 \Rightarrow 12y = 8 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$  نعوض عن قيمة  $y$  بالمعادلة (1) ...  
 $x + 8y = 10 \Rightarrow x + 8 \times \frac{2}{3} = 10 \Rightarrow x = 10 - \frac{16}{3} \Rightarrow x = \frac{14}{3}$   
 لذا مجموعة الحل للنظام هي  $\{(\frac{14}{3}, \frac{2}{3})\}$

### [3-1-3] حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف

#### Solving the system of two linear equations by elimination method

تتلخص هذه الطريقة لحل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين  $x, y$  وذلك بحذف أحد المتغيرين وجعل معامل أحدهما متساوياً بالقيمة ومختلفاً بالإشارة في كلا المعادلتين.

#### مثال (4) جد مجموعة الحل للنظام باستعمال الحذف:

i)  $x + 2y = 5$  .....(1) } نضرب طرفي المعادلة (2).... في العدد 2  
 $3x - y = 1$  ..... (2) } ثم نجمعها مع المعادلة (1) ...  
 $\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 & \text{.....(1)} \\ 6x - 2y = 2 & \text{.....(2)} \end{cases}$  بالجمع  
 $\hline 7x = 7 \Rightarrow x = 1$  نعوض عن قيمة  $x$  في إحدى المعادلتين (بأبسط معادلة)  
 $x + 2y = 5 \Rightarrow 1 + 2y = 5 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2$  نعوض في المعادلة (1).....  
 لذا مجموعة الحل للنظام هي  $\{(1, 2)\}$

ii)  $3x + 4y = 10$  ..... (1) } نضرب المعادلة (1).... في العدد 2  
 $2x + 3y = 7$  ..... (2) } والمعادلة (2).... في العدد 3 ثم نطرح المعادلتين  
 $\Rightarrow \begin{cases} 6x + 9y = 21 & \text{.....(2)} \\ \mp 6x \mp 8y = \mp 20 & \text{.....(1)} \end{cases}$  بالطرح  
 $\hline y = 1$  نعوض عن قيمة  $y$  في إحدى المعادلتين (قبل تغيير الإشارة)  
 $2x + (3 \times 1) = 7 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$  نعوض في المعادلة (2).....  
 لذا مجموعة الحل للنظام هي  $\{(2, 1)\}$

## تأكّد من فهمك

جد مجموعة الحل للنظام بيانياً:

الأسئلة (1 - 3)

مشابهة للمثالين (1,2)

$$\begin{cases} 1 & 3x - y = 6 \\ & x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 & y - x = 3 \\ & y + x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 & y = x - 2 \\ & y = 3 - x \end{cases}$$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال طريقة التعويض لكل مما يأتي:

الأسئلة (4 - 6)

مشابهة للمثال (3)

$$\begin{cases} 4 & 2x + 3y = 1 \\ & 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 & x - 2y = 11 \\ & 2x - 3y = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 & y - 5x = 10 \\ & y - 3x = 8 \end{cases}$$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال طريقة الحذف لكل مما يأتي:

الأسئلة (7 - 9)

مشابهة للمثال (4)

$$\begin{cases} 7 & 3x - 4y = 12 \\ & 5x + 2y = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 & x - 3y = 6 \\ & 2x - 4y = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 & 3y - 2x - 7 = 0 \\ & y + 3x + 5 = 0 \end{cases}$$

جد مجموعة الحل للنظام وتحقق من صحة الحل:

$$\begin{cases} 10 & \frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = 1 \\ & y - \frac{x}{3} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11 & 0.2x - 6y = 4 \\ & 0.1x - 7y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12 & \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 2\frac{3}{4} \\ & \frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y = 6\frac{1}{4} \end{cases}$$

## تدرب وحلّ التمرينات

جد مجموعة حل للنظام بيانياً:

$$\begin{cases} 13 & x - y = -4 \\ & y + x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14 & y = x - 4 \\ & x = 2 - y \end{cases}$$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال طريقة التعويض لكل مما يأتي:

$$\begin{cases} 15 & 3x + 2y = 2 \\ & x - y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16 & 2x - y = -4 \\ & 3x - y = 3 \end{cases}$$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال طريقة الحذف لكل مما يأتي:

$$\begin{cases} 17 & 3x = 22 - 4y \\ & 4y = 3x - 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18 & 5x - 3y = 6 \\ & 2x + 5y = -10 \end{cases}$$



## تدرب وحل مسائل حياتية



- 19 **طقس:** تقل عدد الأيام ( $x$ ) التي تنخفض فيها درجة الحرارة في مدينة بغداد لشهر كانون الثاني عن 10 درجات سيليزية بمقدار 9 أيام على عدد الأيام ( $y$ ) التي تزداد فيها درجة الحرارة على 10 درجات سيليزية. اكتب معادلتين تمثل هذا الموقف، ثم جد حلّهما بطريقة الحذف لإيجاد عدد الأيام في كل حالة.



- 20 **تجارة:** باع متجر 25 ثلاجة وغسالة، بسعر مليون دينار للثلاجة ونصف مليون دينار للغسالة. إذا كان ثمن هذه الأجهزة 20 مليون دينار فكم جهازاً باع من كل نوع؟ اكتب معادلتين تمثلان المسألة ثم حلّهما بطريقة التعويض.



- 21 **حفلة تخرج:** عمل سجاد وأنور حفلة بمناسبة تخرجهما من الكلية فكان عدد الأصدقاء الذين دعاهم سجاد أكثر بثلاثة من عدد الأصدقاء الذين دعاهم أنور. وكان عدد المدعوين 23 شخصاً، فكم شخصاً دعا كل منهما؟ اكتب معادلتين تمثلان المسألة ثم حلّهما لإيجاد المطلوب.

## فكّر

- 22 **تحذّر:** جد مجموعة الحل للنظام:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{6}x - \frac{1}{3}y = 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 3 \end{array} \right\}$$

- 23 **أصحّ الخطأ:** قال أحمد إن مجموعة حل للنظام:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 6 \\ 3x + 2y = 1 \end{array} \right\}$$

هي المجموعة  $\left\{ \left( \frac{5}{16}, \frac{5}{9} \right) \right\}$  اكتشف خطأ أحمد وصحّحه.

## أكتب

مجموعة حل للنظام:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x - 6y = 0 \\ x + 2y = 4 \end{array} \right\}$$



Solving Quadratic Equations with one variable



تعلم

تعد الزقورة من المعالم الحضارية في العراق  
إذ انها تقع في جنوب العراق.  
رسم باسل لوحةً جداريةً للزقورة مربعة  
الشكل مساحتها  $9m^2$  على جدار إسمنتي. جد  
طول ضلع اللوحة .

فكرة الدرس

- حل المعادلة المولفة من حدين بتحليل الفرق بين مربعين.
- المفردات
- معادلة
- درجة ثانية
- متغير واحد
- فرق بين مربعين

[3-2-1] حل المعادلات بالتحليل فرق بين مربعين

Using difference between two squares to solve equations

المعادلة العامة من الدرجة الثانية بمتغير واحد  $ax^2 + bx + c = 0$  حيث  $(a \neq 0)$  وإن  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . وحلها يعني إيجاد مجموعة قيم المتغير  $(x)$  التي تحقق المعادلة أي جعلها عبارة صحيحة. وسوف ندرس في هذا البند حل المعادلات المولفة من حدين باستعمال العامل المشترك الأكبر والفرق بين مربعين وخاصية الضرب الصفري.

مثال (1)

اكتب معادلة تمثل مساحة اللوحة، ثم حلها لإيجاد طول ضلع اللوحة.

$$x^2 = 9$$

افرض طول ضلع اللوحة هو المتغير  $x$  والمعادلة التي تمثل مساحة اللوحة هي:

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 3) = 0$$

التحليل باستعمال الفرق بين مربعين

$$\Rightarrow x + 3 = 0 \text{ or } x - 3 = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$\Rightarrow (x = -3 \text{ يهمل}) \text{ or } x = 3$$

طول اللوحة الجدارية هو  $3m$

مثال (2)

حل المعادلة التالية باستعمال الفرق بين مربعين وتحقق من صحة الحل:

$$16 - y^2 = 0 \Rightarrow (4 + y)(4 - y) = 0$$

التحليل باستعمال الفرق بين مربعين

$$4 + y = 0 \text{ or } 4 - y = 0 \Rightarrow y = -4 \text{ or } y = 4 \Rightarrow S = \{-4, 4\}$$

مجموعة الحل

التحقق: كل قيمة في مجموعة الحل للمتغير  $y$  يجب أن تحقق المعادلة

$$L.S = 16 - y^2 = 16 - (-4)^2 = 16 - 16 = 0 = R.S$$

بالتعويض عن  $-4$

$$L.S = 16 - y^2 = 16 - 4^2 = 16 - 16 = 0 = R.S$$

بالتعويض عن  $4$

مثال (3)

حل المعادلات التالية باستعمال الفرق بين مربعين:

$$i) 4x^2 - 25 = 0 \Rightarrow (2x + 5)(2x - 5) = 0 \Rightarrow 2x + 5 = 0 \text{ or } 2x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{2} \text{ or } x = \frac{5}{2} \Rightarrow S = \{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\}$$

$$ii) 3z^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3(z^2 - 4) = 0 \Rightarrow (z + 2)(z - 2) = 0$$

بقسمة الطرفين على 3 ثم التحليل

$$\Rightarrow z + 2 = 0 \text{ or } z - 2 = 0 \Rightarrow S = \{-2, 2\}$$

$$iii) 2y^2 - 6 = 0 \Rightarrow y^2 - 3 = 0 \Rightarrow (y + \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{3} \text{ or } y = \sqrt{3} \Rightarrow S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

$$iv) x^2 - 5 = 0 \Rightarrow (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{5} \text{ or } x = \sqrt{5} \Rightarrow S = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$$

$$v) (z + 1)^2 - 36 = 0 \Rightarrow (z + 1 + 6)(z + 1 - 6) = 0 \Rightarrow (z + 7)(z - 5) = 0 \Rightarrow S = \{-7, 5\}$$



### Using square root property to solve the equations

تعلمت في البند السابق كيفية حل المعادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد بطريقة التحليل باستعمال الفرق بين مربعين، والآن سوف نجد مجموعة الحل للمعادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد بطريقة خاصية الجذر التربيعي:

$$\sqrt{x^2} = |x| \geq 0$$

$$25 = 5^2 \Rightarrow \sqrt{25} = \sqrt{(5^2)} = |5| = 5$$

$$25 = (-5)^2 \Rightarrow \sqrt{25} = \sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$$

وبصورة عامة إذا كان  $a$  عدد حقيقي موجب فإن:  $x^2 = a \Rightarrow x = \pm \sqrt{a}$

#### مثال (4) حل المعادلة التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي وتحقق من صحة الحل:

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm \sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$$

$$\Rightarrow S = \{3, -3\}$$

باستعمال قاعدة الجذر التربيعي

مجموعة الحل للمعادلة

التحقق: كل قيمة في مجموعة الحل للمتغير  $x$  يجب أن تحقق المعادلة

$$L.S = x^2 = 3^2 = 9 = R.S$$

بالتعويض عن  $x = 3$

$$L.S = x^2 = (-3)^2 = -3 \times -3 = 9 = R.S$$

بالتعويض عن  $x = -3$

#### مثال (5) حل المعادلة التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

$$i) y^2 = 36 \Rightarrow y = \pm \sqrt{36} \Rightarrow y = \pm 6 \Rightarrow S = \{6, -6\}$$

$$ii) z^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow z = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} \Rightarrow z = \pm \frac{3}{5} \Rightarrow S = \{\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}\}$$

$$iii) x^2 + 81 = 0 \Rightarrow x^2 = -81 \quad (\text{لا يوجد عدد حقيقي مربعه سالب})$$

$$iv) 3y^2 = 7 \Rightarrow y^2 = \frac{7}{3} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{7}{3}} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \Rightarrow S = \{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\}$$

$$v) 4x^2 - 5 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow S = \{\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\}$$

ملاحظة: إذا ربعت طرفي معادلة صحيحة فإن المعادلة الناتجة تبقى صحيحة ( $y = x \Rightarrow y^2 = x^2$ )، مثلاً:

$$\sqrt{x} = 5 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = 5^2 \Rightarrow x = 25$$

$$x^2 = y^2 \not\Rightarrow x = y$$

والعكس ليس صحيح أي أن:

#### مثال (6) حل المعادلات التالية:

$$i) 3\sqrt{x} = 18 \Rightarrow \sqrt{x} = 6 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = 6^2 \Rightarrow x = 36 \Rightarrow S = \{36\}$$

بتربيع طرفي المعادلة

$$ii) \sqrt{y+8} = 3 \Rightarrow (\sqrt{y+8})^2 = 3^2 \Rightarrow y+8 = 9 \Rightarrow y = 9-8 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow S = \{1\}$$

$$iii) \sqrt{5z} = 7 \Rightarrow (\sqrt{5z})^2 = 7^2 \Rightarrow 5z = 49 \Rightarrow z = \frac{49}{5} \Rightarrow S = \{\frac{49}{5}\}$$

$$iv) \sqrt{\frac{x}{13}} = 1 \Rightarrow (\sqrt{\frac{x}{13}})^2 = 1^2 \Rightarrow \frac{x}{13} = 1 \Rightarrow x = 13 \Rightarrow S = \{13\}$$

## تأكّد من فهمك

حل المعادلات التالية باستعمال الفرق بين مربعين وتحقق من صحة الحل:

1  $x^2 - 16 = 0$

2  $81 - y^2 = 0$

3  $2z^2 - 8 = 0$

الأسئلة (1 - 3)

مشابهة للمثال (2)

حل المعادلات التالية باستعمال الفرق بين مربعين:

4  $4x^2 - 9 = 0$

5  $5y^2 - 20 = 0$

الأسئلة (4 - 9)

6  $(y + 2)^2 - 49 = 0$

7  $(3 - z)^2 - 1 = 0$

مشابهة للمثال (3)

8  $x^2 - 3 = 0$

9  $y^2 - \frac{1}{9} = 0$

حل المعادلات التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

10  $x^2 = 64$

11  $z^2 = 7$

الأسئلة (10 - 15)

12  $2y^2 = \frac{49}{8}$

13  $6z^2 - 5 = 0$

مشابهة للمثال (4)

14  $4(x^2 - 12) = 33$

15  $z^2 + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

حل المعادلات التالية:

16  $3\sqrt{x} = 15$

17  $\sqrt{y - 5} = 2$

18  $\sqrt{2z} = 6$

الأسئلة (16 - 18)

مشابهة للمثال (5)

## تدرب وحلّ التمرينات

حل المعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

19  $x^2 = 49$

20  $5y^2 - 10 = 0$

حل المعادلات التالية باستعمال الفرق بين مربعين:

21  $9x^2 - 36 = 0$

22  $9(x^2 - 1) - 7 = 0$

23  $y^2 - \frac{1}{36} = 0$

حل المعادلات التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

24  $x^2 = 121$

25  $50 - 2y^2 = 0$

26  $x^2 = \frac{1}{64}$

27  $7(x^2 - 2) = 50$

حل المعادلات التالية:

28  $6\sqrt{x} = 30$

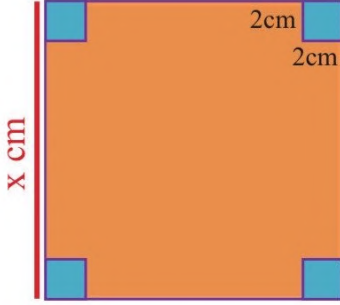
29  $\sqrt{4z} = 8$



## تدرب وحل مسائل حياتية



**30 موكيت سجاد:** قطعة موكيت سجاد مستطيلة طولها 12m وعرضها 3m، قُطعت إلى أجزاء لتغطية أرضية غرفة مربعة الشكل. أكتب معادلة تمثل المسألة ثم جد طول ضلع الغرفة.



**31 هندسة:** قطعة كارتون مربعة الشكل طول ضلعها x cm، قطعت إلى أربعة مربعات متساوية من زواياها طول ضلع كل مربع 2cm، وثُبتت لتكون صندوقاً دون غطاء على شكل متوازي سطوح مستطيلة حجمه  $32 \text{ cm}^3$ . أكتب معادلة تمثل المسألة ثم جد طول ضلع قطعة الكارتون الأصلية.



**32 نافورة:** صُمم حوض سباحة مربع الشكل طول ضلعه 3m في منتصف حديقة مربعة الشكل، فكانت المساحة المتبقية من الحديقة والمحيطة بالحوض  $40 \text{ m}^2$ ، أكتب معادلة تمثل المسألة ثم جد طول ضلع الحديقة.

## فكر

**33 تحدّ:** حل المعادلات التالية:

i)  $9(x^2 + 1) = 34$

ii)  $4x^2 - 3 = 0$

هل المجموعة المعطاة تمثل مجموعة الحل للمعادلة أم لا؟

i)  $(2y + 1)^2 = 16$  ،  $\{\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\}$

ii)  $3x^2 - 7 = 0$  ،  $\{\frac{7}{\sqrt{3}}, -\frac{7}{\sqrt{3}}\}$

**35 أصحّ الخطأ:** قال صلاح إنّ المجموعة  $\{\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\}$  تمثل مجموعة الحل للمعادلة  $5x^2 = 4$  اكتشف خطأ صلاح وصحّحه.

**36 حسّ عدديّ:** عدد صحيح موجب من رقم واحد لو أنقص من مربعه واحد لكان الناتج عدد من مضاعفات العشرة. ما العدد؟

## أكتب

مجموعة الحل للمعادلة:

$(8 - 3y)^2 - 1 = 0$

# الدرس [3-3]

## حل المعادلات التربيعية بالتجربة

Using probe and Error to solve the Quadratic Equations (Experiment)



### تعلم

إذا كان طول ملعب كرة السلة  
يزيد بمقدار 2m على ضعف  
عرضه، ومساحته  $480m^2$ .  
فما بُعْدِي الملعب؟

### فكرة الدرس

- حل المعادلات من الدرجة الثانية المؤلفة من ثلاثة حدود بالتحليل بالتجربة.

### المفردات

- المعادلة التربيعية
- التجربة

## [3-3-1] حل المعادلة $x^2 + bx + c = 0$

### Solving the equation $x^2 + bx + c = 0$

تعرفت سابقاً الى كيفية إيجاد تحليل مقدار جبري مؤلف من ثلاثة حدود بواسطة التجربة، والآن سوف تستعمل التحليل في حل المعادلات من الدرجة الثانية والمؤلفة من ثلاثة حدود  $x^2 + bx + c = 0$  إذ  $b, c$  أعداد حقيقية. (تحليل المقدار إلى قوسين بإشارتين مختلفتين أو بإشارتين متشابهتين بحسب إشارة الحد المطلق والحد الأوسط).

### مثال (1) إيجاد بُعْدِي ملعب كرة السلة.

نفرض أن عرض الملعب بالمتغير  $x$ ، ولذا فإن طول الملعب يكون  $2x + 2$

مساحة الملعب = الطول  $\times$  العرض

$$x(2x + 2) = 480 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 480 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 240 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 16)(x - 15) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 16 = 0 \Rightarrow x = -16 \\ \text{or } x - 15 = 0 \Rightarrow x = 15 \end{cases}$$

الحد الأوسط  $-15x + 16x = x$

يهمل لأنه لا يوجد طول بالسالب

لذا عرض الملعب 15m وطوله  $2 \times 15 + 2 = 32m$

### مثال (2) حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

$$i) x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ or } x = 4 \Rightarrow S = \{3, 4\}$$

$$ii) y^2 + 8y + 15 = 0 \Rightarrow (y + 3)(y + 5) = 0 \Rightarrow y = -3 \text{ or } y = -5 \Rightarrow S = \{-3, -5\}$$

$$iii) z^2 + z - 30 = 0 \Rightarrow (z + 6)(z - 5) = 0 \Rightarrow z = -6 \text{ or } z = 5 \Rightarrow S = \{-6, 5\}$$

$$iv) x^2 - 2x - 63 = 0 \Rightarrow (x - 9)(x + 7) = 0 \Rightarrow x = 9 \text{ or } x = -7 \Rightarrow S = \{9, -7\}$$

v) ما العدد الذي مربعه يزيد عليه بمقدار 12؟

نفرض العدد  $x$ ، فيكون مربع العدد  $x^2$ ، والجملة العددية التي تمثل المسألة هي:

$$x^2 - x = 12 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ or } x = -3$$

لذا العدد إما 4 أو -3



### [3-2-3] حل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ وأن $a \neq 0$

#### Solving the equation $ax^2 + bx + c = 0$ , $a \neq 0$

تعلمت سابقاً حل معادلة من الدرجة الثانية بطريقة التجربة وأن المتغير  $x^2$  معاملته (1)، أما الآن فستتعلم كيفية حل المعادلة نفسها ولكن مع وجود معامل للمتغير  $x^2$ .



**مثال (3)** مسبح يقل طوله عن ثلاثة أمثاله عرضه بمقدار 1m. فإذا كانت مساحة المسبح  $140 \text{ m}^2$ ، جد أبعاده.

نفرض عرض المسبح بالمتغير  $x$

لذا طول المسبح  $3x - 1$

المعادلة التي تمثل المسألة هي  $x(3x - 1) = 140$ ، نحل المعادلة:

$$x(3x - 1) = 140 \Rightarrow 3x^2 - x - 140 = 0$$

الحد الأوسط  $-21x + 20x = -x$

$$\Rightarrow (3x + 20)(x - 7) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 20 = 0 \Rightarrow x = -\frac{20}{3} \\ \text{or } x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7 \end{cases}$$

يُهمل لأنه لا يوجد طول بالسالب

$$\therefore 3(7) - 1 = 21 - 1 = 20 \quad \text{طول المسبح}$$

#### مثال (4) حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

i)  $4y^2 - 14y + 6 = 0 \Rightarrow (4y - 2)(y - 3) = 0$

الحد الأوسط  $-12y - 2y = -14y$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \\ \text{or } y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \end{cases} \Rightarrow S = \{\frac{1}{2}, 3\}$$

ii)  $3x^2 + 18x - 21 = 0 \Rightarrow (3x - 3)(x + 7) = 0$

الحد الأوسط  $21x - 3x = 18x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \text{or } x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7 \end{cases} \Rightarrow S = \{1, -7\}$$

iii)  $20 + 13z + 2z^2 = 0 \Rightarrow (4 + z)(5 + 2z) = 0$

الحد الأوسط  $8z + 5z = 13z$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 + z = 0 \Rightarrow z = -4 \\ \text{or } 5 + 2z = 0 \Rightarrow z = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \{-4, -\frac{5}{2}\}$$

iv)  $9x^2 - 69x - 24 = 0 \Rightarrow 3(3x^2 - 23x - 8) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 23x - 8 = 0$

$$\Rightarrow (3x + 1)(x - 8) = 0$$

الحد الأوسط  $-24x - x = -23x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \\ \text{or } x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \end{cases} \Rightarrow S = \{-\frac{1}{3}, 8\}$$

## تأكّد من فهمك

حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

1  $x^2 - 9x + 18 = 0$

2  $x^2 - 4x - 32 = 0$

3  $y^2 + 48y - 49 = 0$

4  $y^2 + 9y - 36 = 0$

5  $x^2 - 3x + 2 = 0$

6  $y^2 - 8y - 33 = 0$

الأسئلة (1 - 6)

مشابهة للمثال (2)

الأسئلة (7 - 9)

مشابهة للمثال (1)

7 ما العدد الذي مربعه يزيد على ضعفه بمقدار 35 ؟

8 ما العدد الذي لو أضيف 4 أمثاله إلى مربعه لكان الناتج 45 ؟

9 سجادة طولها يزيد على عرضها بمقدار 2m ومساحتها  $48m^2$ . ما أبعاد السجادة؟

حل المعادلات الآتية:

10  $15x^2 - 11x - 14 = 0$

11  $6 + 7x - 5x^2 = 0$

12  $42 + 64y + 24y^2 = 0$

13  $36 - 75x + 6x^2 = 0$

14  $70 - 33y + 2y^2 = 0$

الأسئلة (10 - 14)

مشابهة للمثال (4)

15 أرض مستطيلة الشكل يزيد طولها بمقدار 4m على عرضها. ما بُعد الأرض إذا

السؤال (15)

مشابهة للمثال (3)

كانت مساحتها  $60m^2$  ؟

## تدرب وحل التمرينات

حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

16  $x^2 - 15x + 56 = 0$

17  $y^2 + 16y + 63 = 0$

18  $x^2 + 15x - 16 = 0$

19  $y^2 - y - 42 = 0$

20 قطعة معدن مستطيلة الشكل ينقص عرضها بمقدار 2m عن طولها. ما بُعد القطعة المعدنية إذا كانت

مساحتها  $24m^2$  ؟

21 صالة طعام ينقص طولها عن مِثلي عرضها بمقدار 3m ومساحتها  $54m^2$ . ما أبعاد الصالة؟

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

22  $x^2 - 4x + 3 = 0$

23  $y^2 - 9y - 36 = 0$

24  $4 - 26x + 12x^2 = 0$



## تدرب وحل مسائل حياتية



25 **رياضة:** إذا كان طول صورة إعلانية لملاعب كرة القدم يزيد بمقدار 4m على ضعف عرضها، فما بعدا الصورة إذا كانت مساحتها  $160 \text{ m}^2$ ؟



26 **حقل نعام:** إذا كان طول حقل لتربية طيور النعام يقل بمقدار 4m عن ضعف عرضه، فإذا كانت مساحة الحقل  $96 \text{ m}^2$ ، فهل يكفي سياج طوله 44m لتحويط الحقل؟



27 **إطار صورة:** اشترى سامر إطار لصورة، طوله ضعف عرضه. يحتاج سامر إلى تصغير الإطار بمقدار 2cm من طوله وعرضه ليصبح مناسباً للصورة، فما أبعاد الإطار الذي اشتراه سامر، إذا كانت مساحة الصورة  $40 \text{ cm}^2$ ؟

## فكر

28 **تحذ:** حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

i)  $(x - 3)(x + 2) = 14$

ii)  $3y^2 - 11y + 10 = 80$

29 **وضح:** هل أن المجموعة المعطاة تمثل مجموعة حل للمعادلة أم لا؟

i)  $4x^2 + 2x = 30$  ،  $\{-\frac{2}{5}, 3\}$

ii)  $42 - 33y + 6y^2 = 0$  ،  $\{2, \frac{7}{2}\}$

30 **أصح الخطأ:** قالت رنا إن مجموعة الحل للمعادلة  $2x^2 - 34x + 60 = 0$  هي  $\{3, 15\}$ . أعدد خطأ رنا وأصححه.

## أكتب

معادلة تمثل المسألة التالية ثم جد حلها:  
ما العدد الذي ينقص ضعفه عن مربعه بمقدار 35؟

## الدرس [3-4]

### حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل

### Solving the Quadratic Equations by the Perfect Square

#### تعلم



الجاكور (Panthera onca) هو أحد السنوريات الكبرى المنتمية لجنس النمور، جد قيمة  $x$  من المعادلة  $x^2 - 20x + 100 = 0$  والتي تمثل طول ضلع المنطقة المربعة المحددة له بالمتر المربع في حديقة الحيوانات.

#### فكرة الدرس

• حل المعادلات التربيعية بطريقة إكمال المربع.

#### المفردات

- الحد الأول
- الحد الأخير
- مربع كامل
- إكمال المربع

### [3-4-1] حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل

### Solving the quadratic equations by the perfect square

تعرفت سابقاً إلى كيفية تحليل مقدار جبري على هيئة مربع كامل، والآن سوف نستعمل هذا التحليل في حل معادلات بالتحليل بالمربع الكامل لإيجاد مجموعة الحل للمعادلة.

#### مثال (1)

ما المقدار الذي يمثله طول ضلع المنطقة المربعة؟

$$x^2 - 20x + 100 = 0$$

$$2(x \times 10) = 20x$$

$$x^2 - 20x + 100 = 0 \Rightarrow (x - 10)^2 = 0 \Rightarrow (x - 10)(x - 10) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 10 = 0 \Rightarrow x = 10 \\ \text{or } x - 10 = 0 \Rightarrow x = 10 \end{cases}$$

لذا طول ضلع المنطقة المربعة المخصصة للنمر هو 10m

لتحليل الطرف الأيسر من المعادلة نتأكد من أن المقدار يمثل مربعاً كاملاً

مربع كامل لأن: الحد الأوسط =  $2 \times (\text{جذر الحد الأول} \times \text{جذر الحد الأخير})$

تحليل المقدار

#### مثال (2) حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

$$\text{i) } 4x^2 + 20x + 25 = 0$$

$$\text{الحد الأوسط } 2 \times (2x \times 5) = 20x$$

$$\Rightarrow (2x + 5)^2 = 0 \Rightarrow 2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

نأخذ أحد العوامل المتكررة

$$\text{ii) } y^2 - y + \frac{1}{4} = 0$$

$$\text{الحد الأوسط } 2 \times (y \times \frac{1}{2}) = y$$

$$\Rightarrow (y - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow y - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

نأخذ أحد العوامل المتكررة

$$\text{iii) } 3 - 6\sqrt{3}z + 9z^2 = 0$$

$$\text{الحد الأوسط } 2 \times (\sqrt{3} \times 3z) = 6\sqrt{3}z$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3} - 3z)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{3} - 3z = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

نأخذ أحد العوامل المتكررة



## Solving quadratic equations by completing the square

الآن سوف نتعرف إلى كيفية حل معادلة من الدرجة الثانية بطريقة إكمال المربع:

- (1) نضع المعادلة التربيعية بالصورة  $-c = ax^2 + bx$  ، حيث  $a \neq 0$  .
- (2) إذا كان  $a \neq 1$  فتقسم المعادلة على  $a$  .
- (3) نضيف إلى طرفي المعادلة المقدار (مربع نصف معامل  $x$ ) .
- (4) نحلل الطرف الأيسر الذي أصبح مربعاً كاملاً بعد الخطوة 3 ، ونبسّط الطرف الأيمن.
- (5) نأخذ الجذر التربيعي للطرفين ونجد قيم  $x$  .

### مثال (3) حل المعادلات التالية بطريقة إكمال المربع:

i)  $x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 12$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 12 + 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 16 \Rightarrow (x - 2)^2 = 16$$

$$\Rightarrow x - 2 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 4 \Rightarrow x = 6 \\ \text{or } x - 2 = -4 \Rightarrow x = -2 \end{cases} \Rightarrow S = \{6, -2\}$$

نكتب المعادلة كما في الخطوة الأولى

إضافة المقدار  $(\frac{1}{2} \times -4)^2 = 4$  إلى طرفي المعادلة

نأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

ii)  $2y^2 - 3 = 3y \Rightarrow 2y^2 - 3y = 3$

$$\Rightarrow y^2 - \frac{3}{2}y = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{16} = \frac{3}{2} + \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow (y - \frac{3}{4})^2 = \frac{33}{16}$$

$$\Rightarrow y - \frac{3}{4} = \pm \frac{\sqrt{33}}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{3 + \sqrt{33}}{4} \\ \text{or } y - \frac{3}{4} = -\frac{\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{3 - \sqrt{33}}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \frac{3 - \sqrt{33}}{4}, \frac{3 + \sqrt{33}}{4} \right\}$$

نكتب المعادلة كما في الخطوة الأولى

بقسمة طرفي المعادلة على 2

إضافة المقدار  $(\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{16}$  إلى طرفي المعادلة

بتحليل الطرف الأيسر ونبسّط الطرف الأيمن للمعادلة

نأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

مثال (4) مستطيل يزيد طوله على عرضه بمقدار 2cm ، قدر طول المستطيل وعرضه بالتقريب لأقرب عدد صحيح إذا كانت مساحته  $36\text{cm}^2$  .

نفرض عرض المستطيل بالمتغير  $x$  فيكون طول المستطيل هو  $x + 2$

$$x(x + 2) = 36$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x = 36$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 36 + 1$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 = 37 \Rightarrow x + 1 = \pm \sqrt{37} \Rightarrow x + 1 \approx \pm 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 \approx 6 \Rightarrow x \approx 5 \\ \text{or } x + 1 \approx -6 \Rightarrow x \approx -7 \end{cases} \text{ يهمل}$$

والمعادلة التي تمثل المسألة:

نحل المعادلة بطريقة إكمال المربع

نضيف  $1 = (\frac{1}{2} \times 2)^2$  إلى طرفي المعادلة

$$\sqrt{37} \approx \sqrt{36}$$

لذا عرض المستطيل التقريبي 5cm وطوله 7cm

## تأكّد من فهمك

حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

1  $x^2 + 12x + 36 = 0$

2  $y^2 - 10y + 25 = 0$

3  $4x^2 - 4x + 1 = 0$

4  $y^2 + 2\sqrt{7}y + 7 = 0$

5  $x^2 + 16x = -64$

6  $\frac{1}{16} - \frac{1}{2}x + x^2 = 0$

الأسئلة (1 - 6)

مشابهة للمثال (2)

حل المعادلات التالية بإكمال المربع:

7  $x^2 - 10x - 24 = 0$

8  $y^2 - 3 = 2y$

9  $4x^2 - 3x - 16 = 0$

10  $3y^2 + 2y = 1$

11  $x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{1}{5}$

12  $5y^2 + 15y - 30 = 0$

الأسئلة (7 - 12)

مشابهة للمثال (3)

## تدرب وحلّ التمرينات

حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

13  $x^2 + 24x + 144 = 0$

14  $y^2 + 4\sqrt{2}y + 8 = 0$

15  $3y^2 + 36 - 12\sqrt{3}y = 0$

16  $y^2 + 2\sqrt{3}y = 3$

17  $x^2 - 2x = 0$

18  $x^2 - \frac{2}{3}x = 4$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع:

حل المعادلات التالية بإكمال المربع، وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح:

19  $x^2 - 6x = 15$

20  $y(2y + 28) = 28$



## تدرب وحل مسائل حياتية



- 21 **مدينة بابل:** مدينة بابل باللاتينية Babylon هي مدينة عراقية كانت تقع على نهر الفرات، وكانت عاصمة البابليين أيام حكم حمورابي سنة (1750 - 1792) قبل الميلاد. جد قيمة  $x$  من المعادلة  $x^2 - 28x + 196 = 0$  والتي تمثل طول ضلع إحدى القاعات المربعة الشكل.



- 22 **دب الباندا:** المساحة المخصصة لدب الباندا في حديقة الحيوانات مستطيلة الشكل 126 متراً مربعاً، وعرضها يقل بمقدار 8 متر عن طولها. جد أبعاد المنطقة المخصصة للدب بالتقريب لأقرب عدد صحيح.



- 23 **حيتان:** تنجح بعض المجموعات من الحيتان إلى الشاطئ ولا يوجد تفسير علمي لهذه الظاهرة، ويحاول حماة البيئة إرجاعها إلى البحر. حل المعادلة  $x^2 + 20x = 525$  بطريقة إكمال المربع لإيجاد قيمة  $x$  التي تمثل عدد الحيتان التي جنحت إلى أحد شواطئ استراليا.

## فكر

- 24 **تحذ:** حل المعادلات التالية في  $R$  بإكمال المربع، وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح:

i)  $4x(x - 6) = 27$

ii)  $6y^2 - 48y = 6$

- 25 **أصح الخطأ:** حلت سوسن المعادلة  $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$  بطريقة إكمال المربع وكتبت مجموعة الحل للمعادلة بالشكل الآتي:  $S = \{\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\}$ . اكتشف خطأ سوسن وصححه.

- 26 **حس عددي:** هل ان مجموعة حل للمعادلة  $y^2 - 4y + 4 = 0$  تحتوي على قيمتين متساويتين بالمقدار أحدهما سالبة والأخرى موجبة؟ وضّح إجابتك.

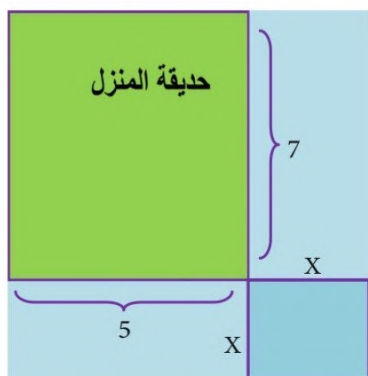
## أكتب

$$\frac{1}{81} - \frac{2}{9}z + z^2 = 0$$

مجموعة الحل للمعادلة:



Using Quadratic Formula to solve the Quadratic Equations



تعلم

أريدَ رصْفُ ممرٍّ على جانبي حديقة منزل بالسيراميك طول الحديقة 7m وعرضها 5m ، ومساحة الرصف 45m<sup>2</sup>. جد عرض الممر المطلوب رصفه بالسيراميك.

فكرة الدرس

• حل المعادلات من الدرجة الثانية بالقانون العام.

المفردات

- معامل
- الحد المطلق
- القانون العام

[3-5-1] حل المعادلات باستعمال القانون  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  وأن  $a \neq 0$

Solving the equations by using the formula  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  and  $a \neq 0$

تعلمت في الدروس السابقة كيفية حل معادلة من الدرجة الثانية بطرائق عدة، ولكن هنالك معادلات لا يمكن حلها بالطرائق السابقة، فسوف نحلها بطريقة القانون العام (الدستور) وذلك لإيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية وكما يأتي:

- (1) نضع المعادلة التربيعية بالصورة العامة (القياسية)  $ax^2 + bx + c = 0$ .
- (2) نكتب قيم المعاملات:  $a$  معامل  $x^2$ ،  $b$  معامل  $x$  مع إشارته،  $c$  الحد المطلق مع إشارته.
- (3) نعوض بالقانون العام لإيجاد قيمتي المتغير.

**مثال (1)** من فقرة تعلم، ما عرض الممر المطلوب رصفه على جانبي الحديقة؟

على فرض أن عرض الممر هو  $x$ ، فإن مساحة الجزء الأيمن من الممر  $= 7x$ ،

ومساحة الجزء الممر الأمامي  $= 5x$ ، ومساحة زاوية الممر  $= x^2$  ومجموع مساحتي الرصف  $45m^2$ .

$$x^2 + 7x + 5x = 45 \Rightarrow x^2 + 12x = 45$$

$$x^2 + 12x - 45 = 0$$

$$a = 1, b = 12, c = -45$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \times 1 \times (-45)}}{2 \times 1} \Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 180}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{324}}{2} \Rightarrow x = \frac{-12 \pm 18}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-12 + 18}{2} \Rightarrow x = 3 \\ \text{or } x = \frac{-12 - 18}{2} \Rightarrow x = -15 \end{cases}$$

عرض الممر 3m

يُهمل غير ممكن

**مثال (2)** جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

$$x^2 - 3x - 5 = 0, a = 1, b = -3, c = -5$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 20}}{2} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{29}}{2} \\ \text{or } x = \frac{3 - \sqrt{29}}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{29}}{2}, \frac{3 - \sqrt{29}}{2} \right\}$$



## The discriminant ( $\Delta = b^2 - 4ac$ )

تعلمت في الجزء الأول من هذا الدرس كيفية حل المعادلة بالقانون العام لإيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة. والآن سوف نتطرق إلى مميز المعادلة التربيعية  $ax^2 + bx + c = 0$  وهو  $\Delta = b^2 - 4ac$ ، وإن نوع جذري المعادلة يتعين كما يأتي:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

نوع الجذرين

- 1) جذران حقيقيان نسبتيان ..... (المعاملات أعداد نسبية) ..... موجب ومربع كامل
- 2) جذران حقيقيان غير نسبتيين ..... موجب وليس مربعاً كاملاً
- 3) جذران حقيقيان متساويان ( $-\frac{b}{2a}$ ) ..... صفر
- 4) جذران غير حقيقيين (مجموعة الحل في  $\emptyset = R$ ) ..... سالب

**مثال (3)** حدّد جذري المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

i)  $2x^2 + 3x - 2 = 0$  ,  $a = 2$  ,  $b = 3$  ,  $c = -2$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 9 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$$

المقدار المميز مربع كامل أي للمعادلة جذران نسبتيان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow x = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2} \text{ or } x = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

ii)  $y^2 - 4y - 9 = 0$  ,  $a = 1$  ,  $b = -4$  ,  $c = -9$

المقدار المميز ليس مربعاً كاملاً لذا للمعادلة جذران غير نسبتيين  $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 16 - 4 \times 1 \times (-9) = 52$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 36}}{2} \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{52}}{2} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{13} \text{ or } x = 2 - \sqrt{13}$$

iii)  $z^2 + 8z = -16 \Rightarrow z^2 + 8z + 16 = 0$  ,  $a = 1$  ,  $b = 8$  ,  $c = 16$

قيمة المقدار المميز صفر أي المعادلة لها جذران حقيقيان متساويان  $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 64 - 4 \times 1 \times 16 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = -4$$

يمكن تطبيق القانون ( $-\frac{b}{2a}$ ) مباشرة

iv)  $x^2 - 2x + 10 = 0$  ,  $a = 1$  ,  $b = -2$  ,  $c = 10$

قيمة المقدار المميز سالب ولذلك المعادلة ليس لها حل في  $R$   $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 4 - 4 \times 1 \times 10 = -36$

**مثال (4)**

ما قيمة الثابت  $k$  التي تجعل جذري المعادلة  $x^2 - (k+1)x + 4 = 0$  متساويين؟ تحقق من الإجابة.

يكون جذرا المعادلة متساويين عندما قيمة المقدار المميز  $\Delta$  يساوي صفر.

$$a = 1 , b = -(k+1) , c = 4$$

نحدد قيم المعاملات

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (k+1)^2 - 4 \times 1 \times 4 \Rightarrow \Delta = (k+1)^2 - 16$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (k+1)^2 - 16 = 0$$

نعوض عن قيمة المميز بصفر وذلك لتساوي جذري المعادلة

$$\Rightarrow (k+1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow (k+1)^2 = 16$$

بجذر طرفي المعادلة

$$\Rightarrow k + 1 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} k + 1 = +4 \Rightarrow k = 3 \\ \text{or } k + 1 = -4 \Rightarrow k = -5 \end{cases}$$

**التحقق:** نعوض بقيمة  $k = 3$  بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة:

$$x^2 - (k+1)x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

نعوض بقيمة  $k = -5$  بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة:

$$x^2 - (k+1)x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

## تأكّد من فهمك

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

1  $x^2 - 4x - 5 = 0$

2  $y^2 + 5y - 1 = 0$

3  $3x^2 - 9x = -2$

4  $4y^2 + 8y = 6$

5  $4x^2 - 12x + 9 = 0$

6  $2y^2 - 3 = -5y$

الأسئلة (1 - 6)

مشابهة للمثالين (1,2)

حدّد جذور المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

7  $2x^2 + 3x = 5$

8  $3x^2 - 7x + 6 = 0$

الأسئلة (7 - 10)

9  $y^2 - 2y + 1 = 0$

10  $y^2 + 12 = -9y$

مشابهة للمثال (3)

11 ما قيمة الثابت  $k$  التي تجعل جذري المعادلة  $x^2 - (k + 2)x + 36 = 0$  متساويين؟ تحقق من الإجابة.

12 ما قيمة الثابت  $k$  التي تجعل جذري المعادلة  $4y^2 + 25 = (k - 5)y$  متساويين؟ تحقق من الإجابة.

13 ما قيمة الثابت  $k$  التي تجعل جذري المعادلة  $z^2 + 16 = (k + 4)z$  متساويين؟ تحقق من الإجابة.

14 بيّن أنّ المعادلة  $z^2 - 6z + 28 = 0$  ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية. الأسئلة (11 - 14) مشابهة للمثالين (3,4)

## تدرب وحلّ التمرينات

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

15  $x^2 - 7x - 14 = 0$

16  $y^2 + 3y - 9 = 0$

17  $2x^2 - 8(3x + 2) = 0$

18  $2y^2 - 2 = -10y$

حدّد جذور المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

19  $y^2 - 2y - 10 = 0$

20  $y^2 - 14y + 49 = 0$

21 ما قيمة الثابت  $k$  التي تجعل جذري المعادلة  $x^2 - (k + 6)x + 49 = 0$  متساويين؟ تحقق من الإجابة.

22 بيّن أنّ المعادلة  $2z^2 - 3z + 10 = 0$  ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية.



## تدرب وحل مسائل حياتية



- 23 **ألعاب نارية:** في إحدى المناسبات أطلقت مجموعة من الألعاب النارية عمودياً في الهواء وصلت إلى ارتفاع 140m. احسب الزمن (t ثانية) الذي وصلت به إلى هذا الارتفاع من المعادلة الآتية:  $5t^2 + 60t = 140$



- 24 **تجارة:** يحسب سامر سعر الكلفة للبدلة الرجالية الواحدة ثم يضيف عليها مبلغ للربح ويبيعها للزبائن بمبلغ 120 ألف دينار، إذا كانت p في المعادلة  $p^2 - 30p + 225 = 0$  تمثل مبلغ ربح سامر في البدلة الواحدة بألف الدينانير، فما سعر كلفة البدلة الواحدة؟

## فكر

- 25 **تحذ:** حدّد جذور المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:
- i)  $x^2 + 8x = 10$       ii)  $3y^2 - 6y - 42 = 0$

- 26 **أصحّ الخطأ:** قال سعد إن المعادلة  $2x^2 - 3x - 9 = 0$  ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية. اكتشف خطأ سعد وصحّحه.

- 27 **حسّ عددي:** استعملت مروة المقدار المميّز لكتابة جذري المعادلة  $z^2 - 8z + 16 = 0$  دون تحليلها. فسّر كيف استطاعت مروة كتابة جذري المعادلة.

## أكتب

نوع جذري المعادلة  $x^2 + 100 = 20x$  باستعمال المقدار المميز من دون حلها.

## Solving the Fractional Equations

## تعلم

## فكرة الدرس

- حل المعادلات الكسرية من الدرجة الثانية.

## المفردات

- بسط الكسر
- مقام الكسر
- معادلة كسرية



إذا كان ثمن شراء التحفة الواحدة بدلالة المتغير  $x$  هو  $2x + 3$  ألف دينار و ثمن شراء ثلاث تحفيات أيضاً بدلالة  $x$  هو  $x^2 + 3x - 1$  ألف دينار، فإذا كانت نسبة ثمن تحفة واحدة إلى ثمن ثلاث تحفيات  $\frac{1}{3}$ ، فما ثمن شراء تحفة واحدة؟

تعرفت سابقاً إلى كيفية تبسيط المقادير الجبرية النسبية (الكسرية) وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على عامل مشترك، والآن سوف نستعمل تحليل المقادير الجبرية لحل المعادلات الكسرية التي في مقامها متغير وذلك بالتخلص من الكسور ثم حلها بإحدى الطرائق التي تعلمتها سابقاً.

## مثال (1) اكتب ثمن شراء التحفة الواحدة.

$$\frac{\text{ثمن تحفة واحدة}}{\text{ثمن ثلاث تحفيات}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x - 1)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 1 = 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \\ \text{or } x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

إذن ثمن شراء تحفة واحدة هو  $(2x + 3 = 13)$  ثلاثة عشر ألف دينار

تبسيط الكسر بضرب الطرفين في الوسطين

تبسيط المعادلة لتحليلها

يهمل لايوجد سعر بالسالب

## مثال (2) جد مجموعة الحل للمعادلة التالية، ثم تحقق من صحة الحل:

$$5x + \frac{x-2}{3x} = \frac{2}{3}$$

نضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر (LCM) للتخلص من الكسور

$$3x(5x) + 3x\left(\frac{x-2}{3x}\right) = 3x\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow 15x^2 + x - 2 = 2x \Rightarrow 15x^2 - x - 2 = 0$$

تبسيط المعادلة

$$\Rightarrow (3x + 1)(5x - 2) = 0$$

تحليل بالتجربة

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \\ \text{or } 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \\ \text{or } 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right\}$$

مجموعة الحل

التحقق: نعوض بالمعادلة الأصلية عندما  $x = -\frac{1}{3}$ :

$$L.S = 5\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{-\frac{1}{3} - 2}{3 \times -\frac{1}{3}} = -\frac{5}{3} + \frac{-1}{3} + 2 = -\frac{5}{3} + \frac{1}{3} + 2 = \frac{-5 + 1 + 6}{3} = \frac{2}{3} = R.S$$

كذلك من السهل التحقق عندما  $x = \frac{2}{5}$  (نترك للطالب)



تعلمت سابقاً كيفية تبسيط جمع المقادير الجبرية النسبية (الكسرية) وطرحها وذلك بتحليل كل من بسط ومقام الكسر إلى أبسط صورة ثم إجراء عملية جمع وطرح المقادير الكسرية باستعمال المضاعف المشترك الأصغر وتبسيط المقدار إلى أبسط صورة (simplest form)، والآن سوف تستعمل ذلك في حل المعادلات الكسرية لإيجاد مجموعة حلول المعادلة الكسرية .

### مثال (3) جد مجموعة الحل للمعادلة:

$$\frac{x}{x-3} + \frac{4x}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x-3} + \frac{4x}{x+3} = \frac{18}{(x-3)(x+3)}$$

نحلل المقامات إلى أبسط صورة ممكنة

$$\Rightarrow x(x+3) + 4x(x-3) = 18$$

بضرب طرفي المعادلة في LCM (x-3)(x+3)

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 4x^2 - 12x - 18 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 9x - 18 = 0$$

تبسيط المعادلة وحلها لإيجاد قيم المتغير

$$\Rightarrow (5x+6)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -\frac{6}{5} \text{ or } x = 3$$

**ملاحظة:** يجب استبعاد القيم التي تجعل مقام أي حد كسري من حدود المعادلة الأصلية صفراً لأنه يؤدي إلى القسمة على صفر وهذا غير جائز.

ولذا نستبعد  $x = 3$  من الحل لأن  $(\frac{x}{x-3} = \frac{3}{0})$ ، ويكون الحل فقط هو  $x = -\frac{6}{5}$

**التحقق:** نعوض بالمعادلة الأصلية  $x = -\frac{6}{5}$  ونرى إن كان طرفا المعادلة متساويين أم لا؟

$$L.S = \frac{x}{x-3} + \frac{4x}{x+3} = \frac{-\frac{6}{5}}{-\frac{6}{5}-3} + \frac{4 \times (-\frac{6}{5})}{-\frac{6}{5}+3} = \frac{6}{21} - \frac{24}{9} = -\frac{50}{21}$$

$$R.S = \frac{18}{x^2-9} = \frac{18}{(-\frac{6}{5})^2-9} = \frac{18}{\frac{36}{25}-9} = -\frac{450}{189} = -\frac{50}{21}$$

$$L.S = R.S$$

لذا قيمة  $x = -\frac{6}{5}$  تحقق المعادلة

### مثال (4) جد مجموعة الحل للمعادلة:

$$\frac{2}{x+2} - \frac{x}{2-x} = \frac{x^2+4}{x^2-4}$$

قبل ضرب طرفي المعادلة في LCM للمقامات نحاول

$$\Rightarrow \frac{2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{x^2+4}{(x+2)(x-2)}$$

تحليل مقام الكسر للطرف الأيمن وتغيير  $2-x = -(x-2)$

باستعمال المعلومة  $a-b = -(b-a)$

$$\Rightarrow 2(x-2) + x(x+2) = x^2+4$$

بضرب طرفي المعادلة في LCM (x+2)(x-2)

$$\Rightarrow 2x-4+x^2+2x-x^2-4=0 \Rightarrow 4x-8=0 \Rightarrow x=2$$

عند التعويض عن  $x=2$  بالمعادلة الأصلية نحصل على عملية قسمة على صفر وهذا غير جائز  $(\frac{x}{2-x} = \frac{2}{0})$

لذلك المعادلة ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، أي مجموعة الحل في R هي مجموعة خالية ( $\emptyset$ ).

## تأكّد من فهمك

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

$$1 \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{6}{4x^2}$$

$$2 \quad \frac{y}{2} - \frac{7}{5} = \frac{3}{10y}$$

$$3 \quad \frac{x+4}{2} = \frac{-3}{2x}$$

$$4 \quad \frac{y+1}{y^2} = \frac{3}{4}$$

$$5 \quad \frac{9x-14}{x-5} = \frac{x^2}{x-5}$$

$$6 \quad \frac{1}{y^2-6} = \frac{2}{y+3}$$

الأسئلة (1 - 6)  
مشابهة للمثالين (1,2)

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات الآتية:

$$7 \quad \frac{y-4}{y+2} - \frac{2}{y-2} = \frac{17}{y^2-4}$$

$$8 \quad \frac{9}{x^2-x-6} - \frac{5}{x-3} = 1$$

$$9 \quad \frac{12}{y^2-16} + \frac{6}{y+4} = 2$$

$$10 \quad \frac{2x}{x+1} + \frac{3x}{x-1} = \frac{8+7x+3x^2}{x^2-1}$$

الأسئلة (7 - 10)  
مشابهة للمثالين (3,4)

## تدرب وحلّ التمرينات

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

$$11 \quad \frac{4}{6x^2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{x}$$

$$12 \quad \frac{3y}{4} - \frac{6}{12y} + \frac{1}{4} = 0$$

$$13 \quad \frac{9x+22}{x^2} = 1$$

$$14 \quad \frac{9}{(y+2)^2} = \frac{3y}{y+2}$$

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات الآتية:

$$15 \quad \frac{3}{x-4} - \frac{2}{x-3} = 1$$

$$16 \quad \frac{y-5}{y+5} - \frac{y+5}{y-5} = \frac{4y^2-24}{y^2-25}$$

$$17 \quad \frac{6-x}{x^2+x-12} - \frac{2}{x+4} = 1$$

$$18 \quad \frac{4+8y}{y^2-9} + \frac{6}{y-3} = 3$$



## تدرب وحل مسائل حياتية



- 19 **رياضة:** إذا أراد راكب دراجة قطع مسافة 60 km بين مدينتين A,B بسرعة معينة، ولو زادت سرعته بمقدار 10 km/h لَتَمَكَّنَ من قطع هذه المسافة بزمان يقل ساعة واحدة عن الزمن الأول. جد سرعته أولاً.



- 20 **نقل مسافرين:** تقطع طائرة الخطوط الجوية العراقية المسافة 350 km بين مدينة بغداد وأربيل بسرعة معينة، ولو زادت سرعة الطائرة بمقدار 100 km/h لَتَمَكَّنَتِ الطائرة من قطع المسافة بزمان يقل 12 دقيقة عن الزمن الأول. جد سرعة الطائرة التقريبية أولاً.

- 21 **سباق:** شارك نوفل في سباق ثلاثي، وتضمن السباق السباحة وركوب الدراجة والجري، واستغرق ساعتين لإنهاء السباق كما موضح في الجدول المجاور على اعتبار  $x$  تعبر عن معدل سرعته في السباحة. جد معدل سرعته التقريبية في سباق السباحة.

| الزمن | السرعة km/h | المسافة km |              |
|-------|-------------|------------|--------------|
| $t_s$ | $x$         | $d_s = 1$  | السباحة      |
| $t_b$ | $5x$        | $d_b = 20$ | ركوب الدراجة |
| $t_r$ | $x + 4$     | $d_r = 4$  | الجري        |

**ملاحظة:** استعمل معادلة الزمن الإجمالي الذي استغرقه نوفل في السباق بدلالة سرعته في السباحة هو:

$$T(x) = t_s + t_b + t_r$$

## فكّر

- 22 **تحذّر:** جد مجموعة الحل للمعادلة الآتية:

$$\frac{3}{x+5} + \frac{4}{5-x} = \frac{x^2 - 15x + 14}{x^2 - 25}$$

- 23 **أصحّ الخطأ:** استعمل نمير المقدار المميز لبيان جذور المعادلة:

$$\frac{2}{x-7} \times \frac{1}{x-1} = 1$$

فقال نمير أنّ للمعادلة جذران نسبتيان حقيقيان. اكتشف خطأ نمير وصحّحه.

## أكتب

مجموعة الحل في مجموعة الأعداد الحقيقية :

$$\frac{1}{x+6} - \frac{5}{x-6} = 2$$



تعلم

تقطع باخرة شحن مسافة 240 km بين الميناء A والميناء B بسرعة معينة، ولو زادت سرعتها 10 km/h لتمكنت من قطع المسافة بزمان يقل ساعتين عن الزمن الأول. جد سرعة الباخرة أولاً.

فكرة الدرس

- استعمال استراتيجيات كتابة معادلة لحل المسألة.

افهم

**ما المعطيات في المسألة؟** باخرة شحن تقطع المسافة 240km بين المدينة A والمدينة B بسرعة معينة، وتقطعها بزمان يقل ساعتين عن الزمن الأول في حالة زادت سرعتها بمقدار 10 km/h .  
**ما المطلوب من المسألة؟** إيجاد سرعة الباخرة أولاً.

خطّ

**كيف تحل المسألة؟** أكتب معادلة تمثل المسألة ثم أحلها لإيجاد سرعة الباخرة أولاً.

حل

نفرض أن سرعة الباخرة الأولى =  $v$  ، الزمن الأول =  $\frac{240}{v}$

لذا سرعتها الثانية =  $v + 10$  ، الزمن الثاني =  $\frac{240}{v + 10}$

الزمن الأول - الزمن الثاني يساوي 2

$$\frac{240}{v} - \frac{240}{v + 10} = 2$$

بضرب طرفي المعادلة في LCM  $v(v + 10)$

$$240v + 2400 - 240v = 2v(v + 10)$$

$$2400 = 2v^2 + 20v$$

$$v^2 + 10v - 1200 = 0 \Rightarrow (v + 40)(v - 30) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v + 40 = 0 \Rightarrow v = -40 \\ \text{or } v - 30 = 0 \Rightarrow v = 30 \text{ km/h} \end{cases}$$

يهمل  $v = -40$  سرعة الباخرة أولاً  $v = 30 \text{ km/h}$

تحقق

$$\frac{240}{v} = \frac{240}{30} = 8h$$

زمن الباخرة الأولى

$$\frac{240}{v + 10} = \frac{240}{40} = 6h$$

زمن الباخرة الثانية

زمن الباخرة الثانية أقل من زمن الباخرة الأولى بمقدار ساعتين ( $8 - 6 = 2h$ ) ، لذا الحل صحيح.



## حل المسائل التالية باستراتيجية (كتابة معادلة)



1

**نافورة:** زُرعت منطقة مربعة الشكل طول ضلعها 4m بالورد وسط حديقة فندق مربعة الشكل، فكانت مساحة المنطقة المتبقية من الحديقة المحيطة بها  $84 \text{ m}^2$ . ما طول ضلع الحديقة؟



2

**أسد بابل:** وهو تمثال لأسد عُثِرَ عليه في مدينة بابل الأثرية في العراق في سنة 1776، وهو مصنوع من حجر البازلت الأسود الصلب، وموضوع على منصة منتصف منطقة مستطيلة الشكل طولها يزيد على عرضها بمقدار 2m ومساحتها  $15 \text{ m}^2$ . فما أبعادها؟



3

**الأسد:** وهو من أقوى الحيوانات الموجودة على وجه الأرض ويُلقَّب الأسد بملك الغابة نسبةً إلى قوّته بين الحيوانات في الغابة، إذا كانت المعادلة  $x^2 - 30x$  تمثل المساحة التي يبسط الأسد سيطرته عليها بالكيلومتر. ما طول ضلع المنطقة التي يمثلها المتغير  $x$  إذا كانت المساحة 175 كيلومتر مربع؟



4

**ألعاب نارية:** في إحدى المناسبات أُطلقت مجموعة من الألعاب النارية عمودياً في الهواء وصلت إلى ارتفاع 200m. احسب الزمن الذي وصلت به إلى هذا الارتفاع، إذا كانت المعادلة التالية  $2t^2 + 30t = h$  تمثل العلاقة بين الارتفاع بالأمتار ( $h$ ) الذي تصل إليه الألعاب النارية بعد  $t$  ثانية.



جد مجموعة حل للمعادلتين بيانياً:

$$1 \quad \begin{cases} y = 1 + x \\ y = 2 - x \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} y + x = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}$$

$$3 \quad \begin{cases} y - x - 5 = 0 \\ y + x - 1 = 0 \end{cases}$$

جد مجموعة الحل للمعادلتين باستعمال التعويض أو الحذف لكل مما يأتي:

$$4 \quad \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

$$5 \quad \begin{cases} 4x - 2y = -4 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$6 \quad \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

حل المعادلات التالية باستعمال العامل المشترك الأكبر والفرق بين مربعين:

$$7 \quad 9x^2 - 25 = 0$$

$$8 \quad 3y^2 - 12 = 0$$

$$9 \quad (7 - z)^2 - 1 = 0$$

حل المعادلات التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

$$10 \quad x^2 = 49$$

$$11 \quad 81 - y^2 = 0$$

$$12 \quad z^2 = \frac{36}{9}$$

حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

$$13 \quad x^2 + 9x + 18 = 0$$

$$14 \quad z^2 - 2z - 48 = 0$$

$$15 \quad 3x^2 - x - 10 = 0$$

$$16 \quad 7z^2 - 18z - 9 = 0$$

17 ما العدد الذي مربعه ينقص عن أربعة أمثاله بمقدار 3؟

18 حوض سباحة يزيد طوله على مثلي عرضه بمقدار 4m ومساحته 48 m<sup>2</sup>. ما أبعاد المسبح؟

حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

$$19 \quad x^2 - 16x + 64 = 0$$

$$20 \quad \frac{1}{9} - \frac{1}{3}z + \frac{1}{4}z^2 = 0$$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع:

$$21 \quad x^2 - 14x = 32$$

$$22 \quad 4y^2 + 20y - 11 = 0$$

$$23 \quad z^2 - \frac{2}{3}z = 1$$

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

$$24 \quad x^2 - 3x - 7 = 0$$

$$25 \quad 3y^2 - 12y = -3$$

$$26 \quad 5z^2 + 6z = 9$$

حدد جذور المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

$$27 \quad 2x^2 + 8x + 8 = 0$$

$$28 \quad y^2 - 6y - 9 = 0$$

$$29 \quad 4z^2 - 3z + 7 = 0$$

30 ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة  $x^2 - (k + 6)x + 9 = 0$  متساويين؟ تحقق من الإجابة.

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

$$31 \quad \frac{6x}{5} = \frac{5}{6x}$$

$$32 \quad \frac{1}{6y^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{y}$$

$$33 \quad \frac{z + 4}{z^2} = \frac{1}{2}$$

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات الآتية:

$$34 \quad \frac{4}{x - 5} - \frac{3}{x - 2} = 1$$

$$35 \quad \frac{2y}{y + 2} + \frac{y}{2 - y} = \frac{7}{y^2 - 4}$$



## الهندسة الاحداثية

## Coordinate Geometry

الدرس 4-1 التمثيل البياني للمعادلات في المستوي الاحداثي.

الدرس 4-2 ميل المستقيم.

الدرس 4-3 معادلة المستقيم.

الدرس 4-4 النسب المثلثية.

تُعد رياضة التزلج من الرياضات الممتعة في الكثير من مناطق العالم، اذ توفر المنحدرات الجبلية مثلاً جيداً عن الميل. فكلما زاد ميل المنحدر تطلب مهارة اكبر من المتزلجين.

## الاختبار القبلي

عين النقاط على المستوي الاحداثي وحدد موقعها في الأرباع أو المحاور لكل مما يأتي :

1  $A(3, 6)$

2  $B(-3, -5)$

3  $C(0, 2)$

4  $D(-3, 0)$

5  $E(-4, 2)$

6  $F(3, -2)$

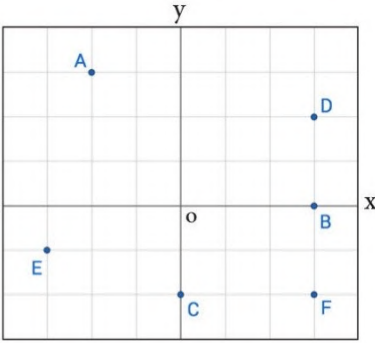
عين النقاط على المستوي الاحداثي، ثم تعرف الى الشكل الناتج لكل مما يأتي:

7  $A(0, 3), B(3, 0) C(-3, 0)$ .

8  $A(1, 4), B(2, 4) C(4, 4), D(6, 4)$ .

9  $A(-2, 4), B(-2, -3) C(1, 4), D(1, -3)$ .

10  $A(0, 3), B(3, 0) C(0, -3), D(-3, 0)$ .



11 اكتب أحداثيات النقاط المؤشرة في المستوي الاحداثي المجاور:

12

| x | y |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 4 |
| 5 | 7 |

13

| x  | y  |
|----|----|
| 5  | 2  |
| -2 | -5 |
| 0  | 3  |

مثل الجداول التالية بالمستوي الاحداثي:

جد قيمة y في كل مما يأتي:

14  $y = 2x - 5, x = 0$

15  $y = -x + 7, x = -1$

16  $y = x^2 + x + 2, x = 1$

17  $3y - x^2 = 9, x = -2$

إذا كانت  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  جد القيمة العددية للمقدار  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  لكل مما يأتي:

18  $A(3, -5), B(-2, 1)$

19  $A(-1, 5), B(4, 5)$



تعلم



في دراسة لتحديد كمية الحليب التي تحتاج إليها جراء أكل النمل حديثو الولادة باللترات على مدى بضعة أيام، توصل الباحث الى المعادلة:

$2y - x = 0$  حيث  $x$  عدد الايام،  $y$  كمية الحليب باللترات.  
كيف يمكنني تمثيل العلاقة بالمستوي الاحداثي؟

فكرة الدرس

- تمثيل المعادلة الخطية في المستوى الاحداثي.
- تمثيل المعادلة التربيعية في المستوى الاحداثي.

المفردات

- الزوج المرتب.
- المستوي الاحداثي.
- المعادلة الخطية.
- المعادلة التربيعية.

[4-1-1] التمثيل البياني للمعادلة الخطية في المستوى الاحداثي

Graphical Representation of the linear Equation in the Coordinate plane

المعادلة الخطية: الصيغة العامة للمعادلة الخطية هي:  $ax + by + c = 0$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$  حيث  $a, b$  لا تساوي صفراً معاً والمتغيرات فيها لا تكون مرفوعة لقوة اكبر من 1 وان، تمثيلها بالمستوي الاحداثي يمثل مستقيماً.

**مثال (1)** لتمثيل المعادلة  $2y - x = 0$  في المستوى الاحداثي نتبع ماياتي:

**الخطوة (1):** نجعل المعادلة بشكل  $y = f(x)$  (أي  $y$  بدلالة  $x$ )

$$2y - x = 0 \Rightarrow 2y = x \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

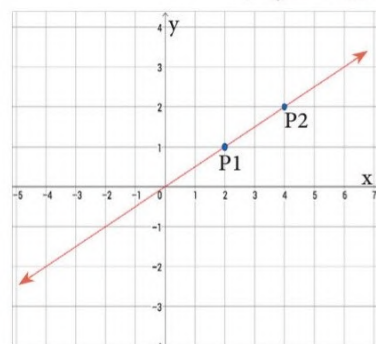
**الخطوة (2):** اختار في الاقل قيمتين للمتغير  $x$  ولتكن  $x=2$ ,  $x=4$  نعوضهما في المعادلة للحصول على أزواج مرتبة.

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(2) \Rightarrow y = 1 \Rightarrow P_1(2, 1)$$

$$x = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(4) \Rightarrow y = 2 \Rightarrow P_2(4, 2)$$

**الخطوة (3):** نعمل جدول بالقيم الناتجة ونمثل الأزواج المرتبة في المستوى الاحداثي ونصل بين النقطتين، الشكل الناتج يمثل مستقيماً.

| x | y | (x,y)       |
|---|---|-------------|
| 2 | 1 | $P_1(2, 1)$ |
| 4 | 2 | $P_2(4, 2)$ |



ملاحظة: معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة الاصل، خالية من الحد المطلق.

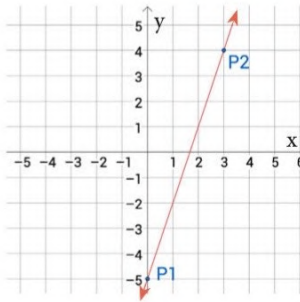
## مثال (2) مثل المعادلات التالية في المستوى الاحداثي، ماذا تلاحظ؟

i)  $y - 3x + 5 = 0$

ii)  $y = 4$

iii)  $x = -3$

i)  $y - 3x + 5 = 0 \Rightarrow y = 3x - 5$

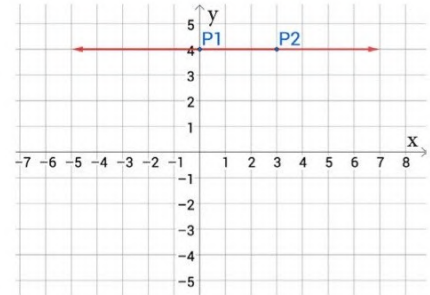


| x | y=3x-5    | (x,y)                 |
|---|-----------|-----------------------|
| 0 | 3(0)-5=-5 | P <sub>1</sub> (0,-5) |
| 3 | 3(3)-5=4  | P <sub>2</sub> (3,4)  |

المستقيم يقطع محور السينات والصادات ولا يمر بنقطة الاصل

ii)  $y = 4$

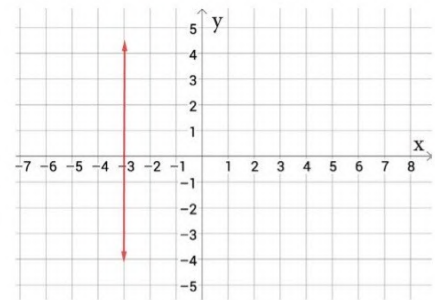
| x | y=4 | (x,y)                |
|---|-----|----------------------|
| 0 | 4   | P <sub>1</sub> (0,4) |
| 3 | 4   | P <sub>2</sub> (3,4) |



المستقيم يوازي محور السينات وعمودي على محور الصادات عند النقطة (0,4)

iii)  $x = -3$

المستقيم  $x = -3$  يوازي محور الصادات وعمودي على محور السينات عند النقطة (-3,0)



يمكن وضع ما تقدم في الجدول الآتي:

| المعادلة                  | العلاقة مع المحورين                                                     |
|---------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| $ax+by+c=0$               | المستقيم يقطع المحورين ولا يمر بنقطة الاصل                              |
| $ax+by=0$                 | المستقيم يقطع المحورين في نقطة الاصل                                    |
| $y = k, k \in \mathbb{R}$ | المستقيم يوازي محور السينات وعمودي على محور الصادات ويمر بالنقطة (0, k) |
| $x = h, h \in \mathbb{R}$ | المستقيم يوازي محور الصادات وعمودي على محور السينات ويمر بالنقطة (h, 0) |

## [4-1-2] التمثيل البياني للمعادلة التربيعية في المستوى الاحداثي

### The Graphical Representation of the Quadratic Equation in the Coordinate Plane

الصيغة العامة للمعادلة التربيعية هي:  $y = ax^2 + bx + c$  حيث  $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$

سوف نتطرق في هذا البند الى المعادلة التربيعية بالصيغة  $y = ax^2 + c$  حيث  $a \neq 0, a, c \in \mathbb{R}$

وطريقة تمثيلها.

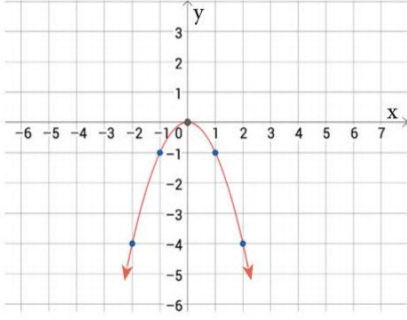
| x  | $y = ax^2 + c$ | y       | (x,y)           |
|----|----------------|---------|-----------------|
| -2 | تعويض قيم x    | النتائج | الازواج المرتبة |
| -1 |                |         |                 |
| 0  |                |         |                 |
| 1  |                |         |                 |
| 2  |                |         |                 |

لتمثيل المعادلة  $y = ax^2 + c$  نعمل الجدول المجاور

ويكون التمثيل البياني للمعادلة هو  $\cup$  او  $\cap$

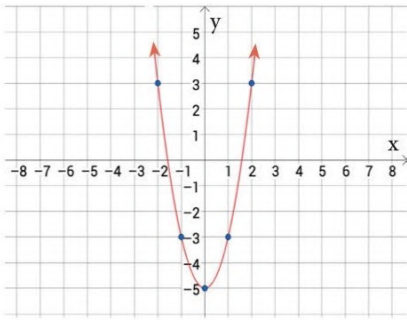


### مثال (3) مثل المعادلة $y = -x^2$



| x  | $y = -x^2$ | y  | (x,y)   |
|----|------------|----|---------|
| -2 | $-(-2)^2$  | -4 | (-2,-4) |
| -1 | $-(-1)^2$  | -1 | (-1,-1) |
| 0  | $-(0)^2$   | 0  | (0,0)   |
| 1  | $-(1)^2$   | -1 | (1,-1)  |
| 2  | $-(2)^2$   | -4 | (2,-4)  |

### مثال (4) مثل المعادلة $y = 2x^2 - 5$



| x  | $y = 2x^2 - 5$ | y  | (x,y)   |
|----|----------------|----|---------|
| -2 | $2(-2)^2 - 5$  | 3  | (-2,3)  |
| -1 | $2(-1)^2 - 5$  | -3 | (-1,-3) |
| 0  | $2(0)^2 - 5$   | -5 | (0,-5)  |
| 1  | $2(1)^2 - 5$   | -3 | (1,-3)  |
| 2  | $2(2)^2 - 5$   | 3  | (2,3)   |

مثل المعادلات الخطية التالية في المستوي الاحداثي وبين علاقتها بالمحورين:

1  $y = 3x + 1$  2  $y = -4x$  3  $y + 3x - 2 = 0$

4  $y = 1 - 3x$  5  $y + 5 = 0$  6  $x - 5 = 0$

7  $y = x^2 + 4$  8  $y = x^2$  9  $y = 1 - 3x^2$

تأكد من فهمك

الاسئلة (1-6) مشابه  
للمثاليين (1,2):

مثل المعادلات التربيعية التالية في المستوي الاحداثي .

الاسئلة (7-9) مشابه  
للمثاليين (3,4):

مثل المعادلات الخطية التالية في المستوي الاحداثي وبين علاقتها بالمحورين:

10  $y = -x + 4$  11  $y = x$

12  $x = -\frac{5}{2}$  13  $y = 0$

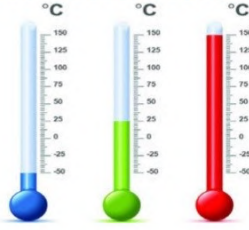
14  $y = x^2 - 1$  15  $y = 2x^2 + 3$  16  $y = -3x^2$  17  $y = 2x^2$

18  $4y = x^2$

مثل المعادلات التربيعية التالية في المستوي الاحداثي .

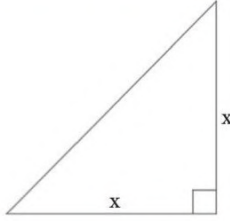
تدرب وحل التمرينات

## تدرب وحل مسائل حياتية



19 **درجات حرارة:** المعادلة  $F^{\circ} = \frac{9}{5}C^{\circ} + 32$  تبين العلاقة بين درجات الحرارة السيليزية ودرجات الحرارة الفهرنهايتية لها، مثل المعادلة بياناً.

20 **هندسة:** مثلث قائم الزاوية متساوي الساقين، طول ضلعه القائم  $x$  وحدة،  $f(x)$  تمثل مساحته. (i) اكتب العلاقة  $f(x)$  بدلالة  $x$ .  
(ii) مثل العلاقة  $f(x)$  في المستوي الاحداثي.

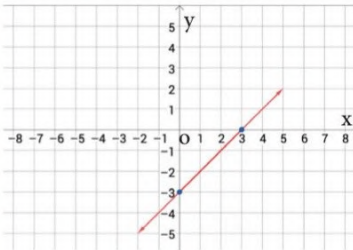


21 **فيزياء:** يمثل القانون  $F = 9.8m$  القوة الناجمة على تأثير جاذبية الارض على جسم، حيث  $F$  القوة بالنيوتن،  $m$  كتلة الجسم بالكيلوغرام، مثل القانون بالمستوي الاحداثي.



22 **اعمال:** تتقاضى شركة معدات بناء 10 الاف دينار كتأمين، يضاف اليها 5 الاف دينار عن كل ساعة، اكتب المعادلة التي تعبر عن المسألة، ثم مثلها بياناً في المستوي الاحداثي.

## فكر



23 **اكتشف الخطأ:** مثل محمد المعادلة الخطية التالية  $y = -3x + 9$  بالشكل البياني المجاور. اكتشف خطأ محمد وصححه.

24 **مسألة مفتوحة:** أعط مثلاً لمعادلة خطية على صورة  $ax + by + c = 0$  لكل حالة:  
i)  $a = 0$  ii)  $b = 0$  iii)  $c = 0$

25 **تحدي:** شكلت الازواج المرتبة التالية  $(-1, 2), (1, 6), (0, 4)$  مستقيماً، ما نقطة تقاطع هذا المستقيم مع محور السينات؟

26 **تبرير:** بين اذا كانت الازواج المرتبة الآتية:  $\{(2, 4), (1, 1), (0, 0), (-1, 1), (-2, 4)\}$  تمثل دالة خطية ام تربيعية.

27 **حس عددي:**  $y = x^2 + 1$ ,  $y = x + 1$  ايهما تمثل دالة تربيعية؟ وضح ذلك.

## اكتب

خطوات تبين ان  $y = 4x + 3$  معادلة خطية؟





## تعلم

المنحدرات الجبلية تُعدّ مثلاً جيداً  
على الميل، فكلما زاد ارتفاع الجبل  
زاد الميل.  
كيف يمكننا تحديد ميل المنحدرات؟

## فكرة الدرس

- إيجاد ميل المستقيم
- إيجاد المقطع الصادي
- إيجاد المقطع السيني

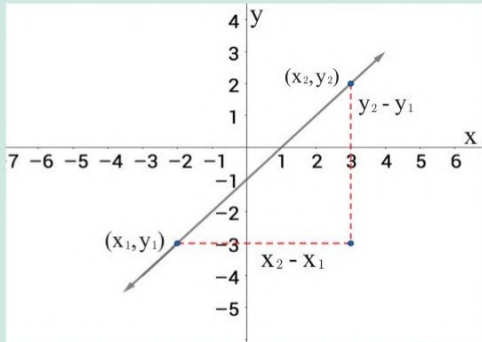
## المفردات

- التغير العمودي
- التغير الافقي
- المقطع السيني
- المقطع الصادي
- الميل

## Finding the Slope of the line

## [4-2-1] إيجاد ميل المستقيم

**الميل:** يُعرف ميل المستقيم غير الرأسي بأنه النسبة بين التغير العمودي الى التغير الافقي.



**التغير العمودي:** هو التغير الصادي ويساوي  $y_2 - y_1$

**التغير الافقي:** هو التغير السيني ويساوي  $x_2 - x_1$

التغير الصادي

التغير السيني

الميل =  $\frac{\text{التغير الصادي}}{\text{التغير السيني}}$

اي:  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  حيث  $x_2 - x_1 \neq 0$

**m:** هو ميل المستقيم المار بالنقطتين  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

يمكن ان يكون ميل المستقيم موجباً او سالباً اذا لم يكن افقياً او رأسياً وقد يكون صفراً (افقياً) او غير محدد (رأسياً).

**مثال (1)** جد ميل المستقيم المار بنقطتين في كل مما يأتي:

i) A(5,7), B(-2,1)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{1 - 7}{-2 - 5}$$

$$m = \frac{-6}{-7}$$

$$m = \frac{6}{7}$$

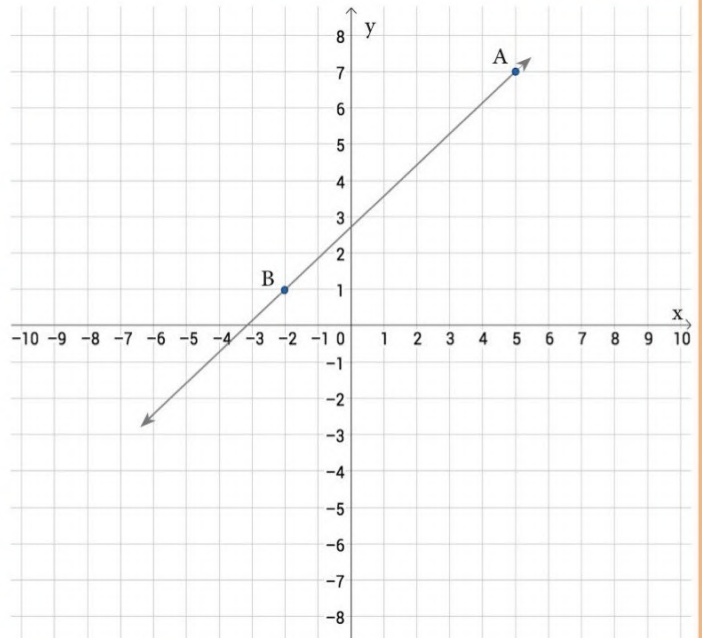
ميل المستقيم المار بنقطتين

نعوض بالنقطتين

بالتبسيط

لذا ميل  $\overleftrightarrow{AB}$  هو  $\frac{6}{7}$  (موجب)

الميل موجب (المستقيم نحو الاعلى)  
عند التحرك من اليسار الى اليمين  
قيم y تتزايد.



ii) A (-1, 5), B(4, 2)

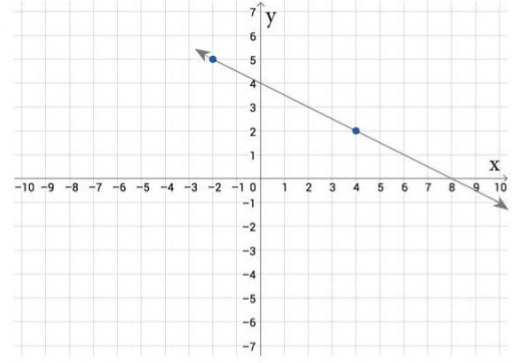
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 5}{4 - (-1)} = \frac{-3}{5}$$

ميل المستقيم المار بنقطتين

نعوض بالنقطتين

لذا ميل  $\overrightarrow{AB}$  هو  $-\frac{3}{5}$  (سالِب)

الميل سالِب (المستقيم نحو الاسفل) عند التحرك من اليسار الى اليمين، قيم  $y$  تتناقص.



iii) A (1, - 2), B(4, - 2)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - (-2)}{4 - 1} = \frac{0}{3} = 0$$

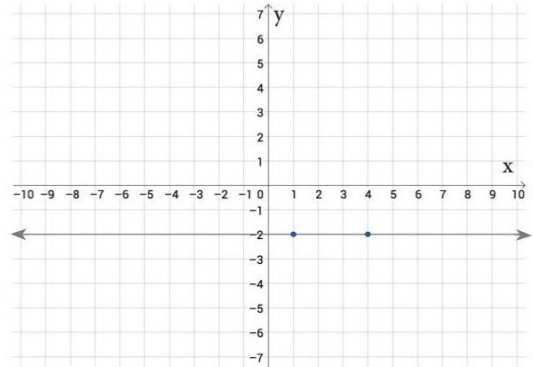
ميل المستقيم المار بنقطتين

نعوض بالنقطتين

لذا ميل  $\overrightarrow{AB}$  هو 0

الميل صفر (المستقيم افقي) يوازي محور السينات، قيم  $y$

ثابتة.



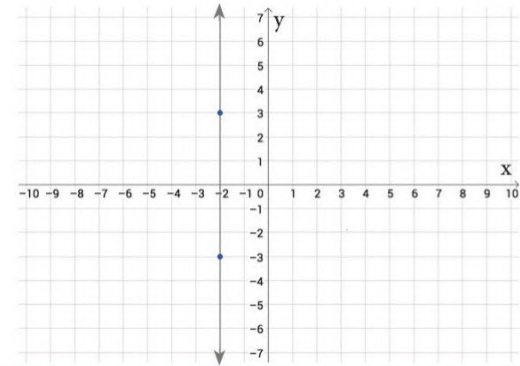
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 3}{(-2) - (-2)}$$

ميل المستقيم المار بنقطتين

نعوض بالنقطتين

لايجوز القسمة على 0 لذا ميل  $\overrightarrow{AB}$  غير محدد

الميل غير محدد (المستقيم شاقولي) يوازي محور الصادات، قيم  $x$  ثابتة



مثال (2)

يُمثِّل الجدول المجاور تغير درجات الحرارة بالزمن (بالساعات)، جد ميل المستقيم واطرح مايعنيه.

| الزمن (الساعات) | درجات الحرارة |
|-----------------|---------------|
| 1               | -2            |
| 2               | 1             |
| 3               | 4             |
| 5               | 10            |

اختر اي نقطتين من الجدول ولتكن  $(x_1, y_1) = (1, -2)$

$(x_2, y_2) = (3, 4)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ميل المستقيم المار بنقطتين

$$= \frac{4 - (-2)}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

التعويض والتبسيط

بما ان ميل المستقيم 3 فان درجات الحرارة تزداد 3 درجات سيليزية كل ساعة.

[4-2-2] تقاطع المستقيم مع المحورين في المستوي الاحداثي

Intersection of the Line with axes in Coordinate plane

يمكنك ان تمثل بسهولة معادلة المستقيم من خلال ايجاد نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين.

**المقطع السيني:** هو قيمة  $x$  من تقاطع المستقيم مع محور السينات، اي بالتعويض من  $y = 0$ . ونقطة التقاطع

$(x, 0)$

**المقطع الصادي:** هو قيمة  $y$  من تقاطع المستقيم مع محور الصادات، اي بالتعويض من  $x = 0$ . ونقطة التقاطع

$(0, y)$



### مثال (3) جد المقطع السيني والصادي للمستقيم $3x + 5y = 15$

#### المقطع السيني

$$3x + 5y = 15$$

المعادلة

$$3x + 5(0) = 15$$

نعوض من  $y = 0$

$$3x = 15$$

تبسيط

$$x = \frac{15}{3}$$

بقسمة طرفي المعادلة على 3

$$x = 5$$

لذا المقطع السيني هو 5.

ونقطة التقاطع مع محور السينات هي:  $(5, 0)$

#### المقطع الصادي

$$3x + 5y = 15$$

المعادلة

$$3(0) + 5y = 15$$

نعوض من  $x = 0$

$$5y = 15$$

تبسيط

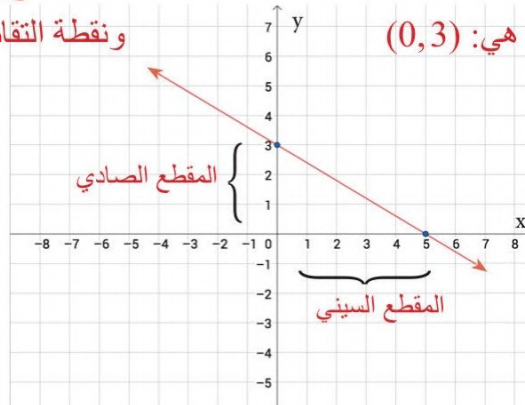
$$y = \frac{15}{5}$$

بقسمة طرفي المعادلة على 5

$$y = 3$$

لذا المقطع الصادي هو 3.

ونقطة التقاطع مع محور الصادات هي:  $(0, 3)$



### مثال (4) جد المقطع السيني والصادي ان وجد لكل مما يأتي:

i)  $x = -2$

ii)  $y = 4$

$x = -2$  يمثل المقطع السيني ونقطة التقاطع  $(-2, 0)$

$y = 4$  تمثل المقطع الصادي ونقطة التقاطع  $(0, 4)$

المستقيم // محور الصادات

المستقيم // محور السينات

### تأكّد من فهمك

جد ميل المستقيم المار بالنقطتين، أموجب الميل أم سالب أم صفر أم غير محدد، ثم حدّد اتجاه حركته لكل مما يأتي:

1  $(-2, -2), (-4, 1)$

2  $(0, 0), (3, 2)$

3  $(-4, 4), (2, -5)$

الاسئلة (1-6) مشابهة للمثالين (1, 2):

4  $(5, 0), (0, 2)$

5  $(4, 3), (4, -3)$

6  $(-6, -1), (-2, -1)$

جد المقطع السيني والمقطع الصادي لكل مما يأتي:

7  $3x + 6y = 18$

8  $y + 2 = 5x - 4$

9  $y = -4x$

الاسئلة (7-18) مشابهة للمثالين (3, 4):

10  $y = -x + 8$

11  $5x = y - 8$

12  $y = -\frac{3}{4}x - 5$

13  $2x + 6y = 12$

14  $y + 4 = 2x - 4$

15  $y = -5x$

16  $x = 4$

17  $3y = -6$

18  $y = -\frac{1}{2}x + 4$

### تدرب وحل التمرينات

جد ميل المستقيم المار بالنقطتين، أموجب الميل أم سالب أم صفر أم غير محدد ثم حدد اتجاه حركته لكل مما يأتي:

19 (6, 2), (0, 2)

20 (-2, -3), (2, 4)

21 (3, -5), (0, 0)

22  $(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}), (\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$

جد المقطع السيني والمقطع الصادي لكل مما يأتي:

23  $3y - 7x = 9$

24  $y = -\frac{3}{2}x$

25  $x = -4$

26  $0 = y + 3$

### تدرب وحل مسائل حياتية

| كمية السائل المتسرب |                  |
|---------------------|------------------|
| الزمن (ثوان)        | حجم السائل $m^3$ |
| 10                  | 40               |
| 13                  | 52               |
| 16                  | 64               |
| 19                  | 76               |

27 **فيزياء:** يمثل الجدول المجاور كمية السائل المتدفق من حوض خلال فترة زمنية، جد ميل المستقيم الذي يمثل الجدول. وفسر مايعنيه.

28 **نبات:** اذا كان طول نبتة 30cm، في غضون كل شهرين تنمو بمقدار ثابت 4cm اخرى.

| الزمن      | 0 | 2 | 4 |
|------------|---|---|---|
| طول النبتة |   |   |   |

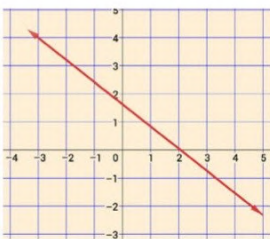
- (i) اكمل الجدول.  
(ii) ما ميل المستقيم الذي تمثله العلاقة بين طول النبتة والزمن؟  
(iii) اكتب العلاقة التي يمثلها الجدول.  
(iv) مثل العلاقة في المستوي الاحداثي.

### فكر

29 **تحدي:** جد قيمة a التي تجعل ميل المستقيم المار بنقطتين  $(1, 6), (-5, a)$  يساوي  $\frac{1}{2}$ .

30 **تفكير ناقد:** هل يمكنك تحديد ميل مستقيم يمر بالنقطتين  $(7, 3), (7, -3)$ ؟

31 **اكتشف الخطأ:** ميل المستقيم الذي يمر في النقطتين  $(0, 3), (3, -1)$  هو  $\frac{3-0}{3-(-1)} = \frac{3}{4}$  اكتشف الخطأ وصححه.



32 **مسألة مفتوحة:** اذكر نقطتين على مستقيم يكون ميله  $-\frac{1}{3}$ .

33 **تفكير ناقد:** من الشكل البياني المجاور حدد اتجاه المستقيم.

### اكتب

باسلوبك ماذا يعني الميل يساوي صفراً، والميل غير محدد.





تعلم

يقطع راكب دراجة هوائية 20 كيلو متراً  
في ساعتين و يقطع 50 كيلو متراً في  
خمس ساعات، ما المعادلة الخطية التي  
ترتبط بين المسافة و الزمن؟

فكرة الدرس

ايجاد معادلة مستقيم علم منه:

- نقطتان
- ميل - نقطة
- ميل - مقطع

المفردات

- الميل
- المقطع

[4-3-1] كتابة معادلة مستقيم بمعرفة نقطتين منه

Writing Equation of Line with two Points of it

معادله مستقيم يمر بالنقطتين  $B(x_2, y_2), A(x_1, y_1)$

تعلمت سابقاً ايجاد ميل مستقيم يمر بالنقطتين  $A, B$  حيث  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$   
على فرض ان النقطة  $C(x, y)$  تقع علي المستقيم فيكون ميل المستقيم المار بالنقطتين  $A, C$  هو  $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$   
من المعلوم ان ميل المستقيم ثابت في جميع نقاطه لذلك فإن:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

هذه المعادلة تمثل معادلة المستقيم  $AB$ .

مثال (1) نجد المعادلة الخطية في فقرة (تعلم):

نفرض ان  $C(x, y) \in \overleftrightarrow{AB}$  ,  $B(5, 50)$  ,  $A(2, 20)$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ x_2 = 5, y_2 = 50 & & x_1 = 2, y_1 = 20 \end{array}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 20}{x - 2} = \frac{50 - 20}{5 - 2}$$

$$\frac{y - 20}{x - 2} = \frac{30}{3}$$

$$y - 20 = 10x - 20$$

$$y = 10x$$

كتابة معادلة المستقيم المار بنقطتين

التعويض من  $(x_2, y_2), (x_1, y_1)$

بالتبسيط

الضرب التبادلي

اذن معادلة المستقيم هي  $y - 10x = 0$

[4-3-2] كتابة معادلة المستقيم بمعرفة ميله ونقط منه

Writing Equation of Line with the Slop and one Point of it

معادلة مستقيم ميله  $m$  ويمر بالنقطة  $(x_1, y_1)$ :

تعلمت سابقاً معادلة مستقيم يمر بنقطتين و التي هي

وتعلمت ان ميل مستقيم مار بالنقطتين  $(x_2, y_2), (x_1, y_1)$  هو

لذلك يمكن كتابة المعادلة في أعلاه بشكل

وبالضرب التبادلي نحصل على المعادلة المطلوبة  $y - y_1 = m(x - x_1)$

## مثال (2) استعمال معادلة الميل والنقطة لكل مستقيم لتحديد ميله والنقطة المار بها:

i)  $y - 3 = -5(x - 2)$

$y - 3 = -5(x - 2)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$m = -5, (x_1, y_1) = (2, 3)$

معادلة الميل - النقطة  
بالمقارنة

ii)  $y + 7 = \frac{2}{5}x$

$y - (-7) = \frac{2}{5}(x - 0)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$m = \frac{2}{5}, (x_1, y_1) = (0, -7)$

معادلة الميل - النقطة  
بالمقارنة

## مثال (3)

جد معادلة المستقيم الذي ميله  $\frac{1}{2}$  ومقطعه السيني يساوي -1 .

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$m = \frac{1}{2}, x_1 = -1, y_1 = 0 \Rightarrow p(-1, 0)$

معادلة الميل - النقطة

الميل، النقطة

$y - 0 = \frac{1}{2}(x - (-1))$

بالتعويض من الميل والنقطة

$y = \frac{1}{2}(x + 1)$

بالتبسيط

$2y = x + 1$

ضرب طرفي المعادلة في 2

$2y - x = 1$

معادلة المستقيم المطلوب

## [4-3-3] كتابة معادلة المستقيم بمعرفه ميله ومقطعه مع أحد المحورين

Writing Equation of the Line with the Slope of it and one intercept with axes

معادلة المستقيم بدلالة ميله  $m$  ومقطعه الصادي  $k$  هي:  $y = mx + k$

## مثال (4)

استعمل معادلة الميل و المقطع لكل مستقيم لتحديد ميله ومقطعه:

i)  $2x + 3y = 6$  ii)  $5x = 7y + 8$  iii)  $y = x$  iv)  $y = 1$  v)  $y = 0$  vi)  $y + x = 5$

i)  $2x + 3y = 6 \Rightarrow 3y = -2x + 6$  بقسمة طرفي المعادلة على 3

$y = \frac{-2}{3}x + 2$

$y = mx + k$

$\therefore m = \frac{-2}{3}, k = 2$

المقارنة مع معادلة الميل - مقطع

ii)  $5x = 7y + 8 \Rightarrow 7y = 5x - 8$  بقسمة المعادلة على 7

$y = \frac{5}{7}x - \frac{8}{7}$

$y = mx + k$

$\therefore m = \frac{5}{7}, k = \frac{-8}{7}$

المقارنة مع معادلة الميل - مقطع

iii)  $y = x \Rightarrow y = 1x + 0$

$y = 1x + 0$

$y = mx + k$

$\therefore m = 1, k = 0$

المقارنة مع معادلة الميل - مقطع

iv)  $y = 0x + 1$

$y = 0x + 1$

$y = mx + k$

$\therefore m = 0, k = 1$

المقارنة مع معادلة الميل - مقطع

v)  $y = 0x + 0$

$y = 0x + 0$

$y = mx + k$

$\therefore m = 0, k = 0$

المقارنة مع معادلة الميل - مقطع

vi)  $y = -1x + 5$

$y = -1x + 5$

$y = mx + k$

$\therefore m = -1, k = 5$

المقارنة مع معادلة الميل - مقطع



## مثال (5)

مستقيم يمر في النقطة  $(5, -1)$  وميله  $-\frac{2}{5}$ . جد مقطعه ومعادلته.

الطريقة الاولى

$$y = mx + k$$

$$m = -\frac{2}{5}$$

$$y = -\frac{2}{5}x + k$$

$$-1 = -\frac{2}{5}(5) + k$$

$$-1 = -2 + k \Rightarrow k = 1$$

$$y = -\frac{2}{5}x + 1 \text{ ، معادلة المستقيم}$$

معادلة الميل - المقطع

معطى

بالتعويض من الميل

بالتعويض بالنقطة

بالتبسيط

$$K = 1 \text{ مقطع المستقيم}$$

الطريقة الثانية

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = -\frac{2}{5}, p(5, -1)$$

$$y - (-1) = -\frac{2}{5}(x - 5)$$

$$5y + 5 = -2x + 10$$

$$5y = -2x + 5$$

$$y = -\frac{2}{5}x + 1 \text{ ، معادلة المستقيم}$$

معادلة الميل - النقطة

معطى

بالتعويض من النقطة والميل

بضرب المعادلة في 5

بقسمة المعادلة على 5 بعد التبسيط

## تأكد من فهمك

جد معادلة المستقيمات التي يمر كل منها بنقطتين فيما يأتي:

1  $(-3, 1), (2, -1)$

2  $(0, 2), (2, -4)$

الاسئلة (1-2)

مشابه للمثال 1

استعمل معادلة الميل والنقطة لكل مستقيم لتحديد ميله والنقطة المار بها:

3  $y - 1 = 2(x - 3)$

4  $y + 1 = -x + 4$

الاسئلة (3-4)

مشابه للمثال 2

جد معادلة المستقيم لكل مما يلي ثم جد مقطعه:

5  $(4, 6), -\frac{2}{5}$

6  $(-1, -3), \frac{1}{3}$

الاسئلة (5-6)

مشابه للمثالين 3، 5

استعمل معادلة الميل والنقطة لكل مستقيم لتحديد ميله ومقطعه:

7  $5y = -2x - 1$

8  $-y = 7x$

الاسئلة (7-8)

مشابه للمثال 4

## تدرب وحل التمرينات

جد معادلة المستقيمات التي يمر كل منها بنقطتين فيما يأتي:

9  $(0, 0), (-3, 7)$

10  $(0, 7), (-5, 0)$

استعمل معادلة الميل والنقطة لكل مستقيم لتحديد ميله والنقطة المار بها:

11  $y + \frac{3}{2} = -5(x - 8)$

12  $y - x = 8$

جد معادلة المستقيم لكل مما يلي ثم جد مقطعه:

13 الميل  $-3$  ،  $(-3, 7)$

14 الميل  $-\frac{1}{2}$  ،  $(1, -4)$

استعمل معادلة الميل والمقطع لكل مستقيم لتحديد ميله ومقطعه:

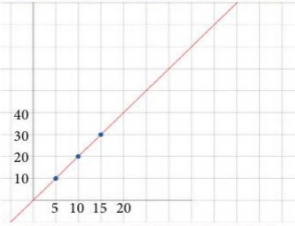
15  $y + 7 = 3x + 5$

16  $\frac{1}{3}y = -5x - 1$

## تدرب وحل مسائل حياتية



- 17 **أحياء :** ينمو ناب الفيل طول حياته بمعدل 1cm لكل شهر. افرض أنك بدأت بمراقبة فيل عندما كان طول نابه 100cm. اكتب على صورة الميل - النقطة معادلة تمثل نمو ناب الفيل بعد n شهر من المراقبة.



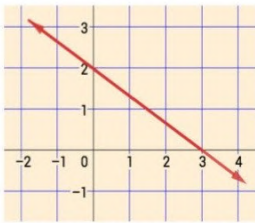
- 18 **فيزياء :** التمثيل البياني المجاور يمثل كمية المياه المتسربة من خزان خلال مدة زمنية محددة. اكتب على صورة نقطتين، معادلة تمثل تسرب المياه بعد n ثانية.



- 19 **نقود :** يريد شخص تسديد مبلغ قدره 30 مليون دينار، بدفعات شهرية متساوية مقدارها 1.5 مليون دينار. المعادلة الخطية الآتية  $y = -1.5x + 30$  حيث y القيمة الباقية من المبلغ، x عدد الاشهر، استعمل معادلة الميل - المقطع لتحديد ميله ومقطعه.



- 20 **صحة :** في دراسة حديثة توصلت الى ان الشخص يفقد 2 ساعة من عمره عند استهلاكه علبة سكاثر واحدة. اكتب المعادلة التي تمثل ذلك، ومثلها بيانياً



- 21 **هندسة :** استعمل المعلومات في الشكل المجاور وجد معادلة المستقيم في الحالات الآتية:  
(i) نقطتان (ii) ميل - نقطة (iii) ميل - مقطعه الصادي

## فكر

- 22 **تفكير ناقد :** هل يوجد مستقيم ميله 4 ويمر بالنقطتين  $(5, 7)$ ,  $(8, -2)$  ؟ إن وجدت مستقيماً كهذا فاكتب معادلته وإلا فاعل جوابك.

- 23 **تحذّر :** مستقيم تقاطعه الأفقي النظير الجمعي لتقاطعه العمودي، ويمر في النقطة  $(2, 3)$ . اكتب معادلة الميل - النقطة لهذا المستقيم.

- 24 **أيهما صحيح :** معادلة مستقيم ميله  $\frac{3}{5}$  ويمر بالنقطة  $(-1, 7)$ .  
كتب احمد المعادلة بشكل  $y - 7 = \frac{5}{3}(x + 1)$   
وكتب محمد المعادلة بشكل  $y - 7 = \frac{3}{5}(x + 1)$  أيهما اجابته صحيحة؟

## أكتب

مسألة من واقع الحياة يمكن تمثيلها بمعادلة الخط المستقيم.



## تعلم

## فكرة الدرس

- تعرف الى النسب المثلثية الاساسية.
- النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- إيجاد قيم عبارات تتضمن زوايا الخاصة.

## المفردات

- النسب المثلثية
- $\sin, \cos, \tan, \sec, \csc, \cot$
- الزوايا الخاصة
- $60^\circ, 45^\circ, 30^\circ, 90^\circ, 0^\circ$



وقف مساح على بعد  $d$  متر من  
بناية، ومن خلال جهازه نظر  
اعلى البناية بزاوية معينة.  
- كيف تساعده النسب المثلثية في  
إيجاد ارتفاع البناية؟

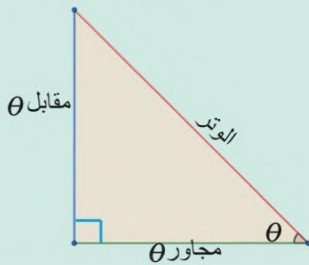
Trigonometric Ratios ( $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ )[4-4-1] النسب المثلثية ( $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ )

تعرفت سابقاً الى عناصر المثلث حيث يتكون من ثلاث زوايا وثلاثة اضلاع. ويسمى المثلث بزواياه (حاد الزوايا، منفرج الزاوية، قائم الزاوية) او بأضلاعه (متساوي الاضلاع، متساوي الساقين، مختلف الاضلاع).  
حساب المثلثات: هي دراسة العلاقة بين زوايا المثلث واضلاعه  
النسبة المثلثية: هي النسبة التي تقارن بين طولي ضلعين من اضلاع المثلث القائم الزاوية.  
النسبة الاساسية هي: الجيب  $\sin$ ، الجيب تمام  $\cos$ ، الظل  $\tan$ .

جيب الزاوية  $\theta$  (يرمز له  $\sin\theta$ ): هي النسبة بين الضلع المقابل للزاوية  $\theta$  و الوتر:

جيب تمام الزاوية  $\theta$  (يرمز له  $\cos\theta$ ): هي النسبة بين الضلع المجاور للزاوية  $\theta$  والوتر:

ظل الزاوية  $\theta$  (يرمز له  $\tan\theta$ ): هي النسبة بين الضلع المقابل للزاوية  $\theta$  والضلع المجاور لها:



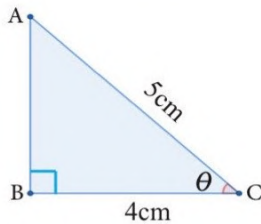
لإيجاد النسب المثلثية ( $\sin, \cos, \tan$ ) نتبع ما يأتي:

(1) رسم تخطيطي لمثلث قائم الزاوية، وثبتت عليه المعطيات.

(2) نستعمل مبرهنة فيثاغورس لإيجاد الضلع المجهول.

(3) نستعمل النسب المثلثية لإيجاد المطلوب.

**مثال (1)** من الشكل المجاور، جد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية  $\theta$ .



أستعمل مبرهنة فيثاغورس لأجد طول الضلع AB (المقابل)

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(5)^2 = (AB)^2 + (4)^2$$

$$(AB)^2 = 25 - 16 = 9$$

$$AB = 3$$

مبرهنة فيثاغورس

بالتعويض والتبسيط

بجذر الطرفين (إشارة موجبة لأنه طول)

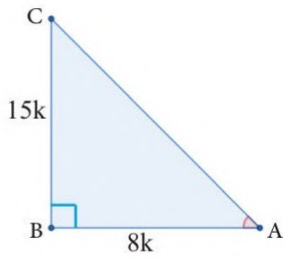
$$\sin\theta = \frac{\text{مقابل الزاوية } \theta}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{مجاور الزاوية } \theta}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{مقابل الزاوية } \theta}{\text{مجاور الزاوية } \theta} = \frac{3}{4}$$

استعمال النسب المثلثية ثم  
التعويض

**مثال (2)** المثلث ABC القائم الزاوية في B اذا كانت  $\tan A = \frac{15}{8}$  جد: i)  $\sin A$  ii)  $\cos A$



$$\tan A = \frac{15k}{8k}$$

$$\tan A = \frac{BC}{BA}$$

بضرب البسط والمقام في الثابت k حيث k اكبر من 0  
قانون الظل

$$\therefore BC = 15k, AB = 8k$$

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$= (8k)^2 + (15k)^2$$

$$= 64k^2 + 225k^2$$

$$(AC)^2 = 289k^2 \Rightarrow \therefore AC = 17k$$

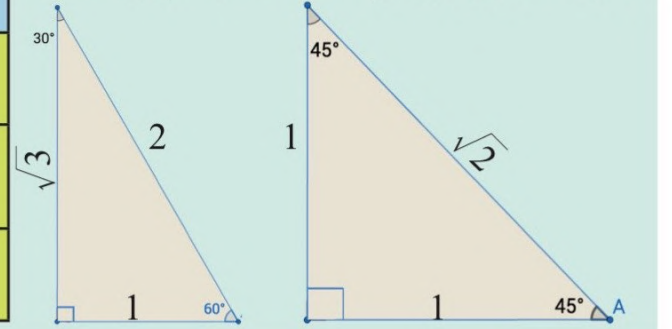
$$i) \sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17} \quad ii) \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{8k}{17k} = \frac{8}{17}$$

بالمقارنة  
مبرهنة فيثاغورس  
بالتعويض  
بالتبسيط  
نجد الطرفين

### [4-4-2] النسب المثلثية للزاويا الخاصة The Trigonometric Ratios for Spcial Angles

| النسبة المثلثية   | 30°                  | 60°                  | 45°                  | 90°      | 0° |
|-------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------|----|
| الجيب<br>sin      | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 1        | 0  |
| الجيب تمام<br>cos | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 0        | 1  |
| الظل<br>tan       | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$           | 1                    | غير معرف | 0  |

الجدول المجاور يبين قيم النسب المثلثية للزاويا الخاصة:



**مثال (3)**

أثبت ان:  $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ = \sin 90^\circ$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \sin 90^\circ = 1$$

$$\text{L.H.S: } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

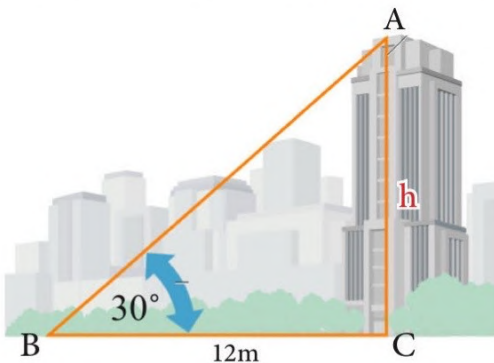
$$\text{R.H.S: } \sin 90^\circ = 1$$

بالتعويض في الطرف الايمن R.H.S  
والطرف الايسر L.H.S

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S} \therefore$$

**مثال (4)**

وقف رجل امام بناية وعلى بعد 12m من قاعدتها ونظر الى قمة البناية بزاوية مقدارها 30°. جد ارتفاع البناية.



النسبة المثلثية التي تربط بين ارتفاع البناية h وبعد الرجل عن قاعدتها هي نسبة الظل.

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{12}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{12}$$

$$\sqrt{3} h = 12$$

$$h = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \text{ m}$$

قانون الظل

التعويض

الضرب التبادلي

التبسيط

ارتفاع البناية هو:  $4\sqrt{3} \text{ m}$



سنقتصر في هذا البند على مقلوب النسب المثلثية  $\sin, \cos, \tan$  و كما ملاحظ في الجدول الآتي:

| النسبة المثلثية | $\sin \theta$                                      | $\cos \theta$                                 | $\tan \theta$                                    |
|-----------------|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| مقلوبها         | $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$<br>قاطع تمام | $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$<br>قاطع | $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$<br>ظل تمام |

### مثال (5)

مثلث قائم الزاوية في B، اذا كانت  $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$  فجد: i)  $\sec A$  ii)  $\csc A$  iii)  $\cot A$

$$\cos A = \frac{\sqrt{3}k}{\sqrt{11}k} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = \sqrt{3}k, AC = \sqrt{11}k$$

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(\sqrt{11}k)^2 = (\sqrt{3}k)^2 + (BC)^2$$

$$11k^2 = 3k^2 + (BC)^2$$

$$(BC)^2 = 8k^2$$

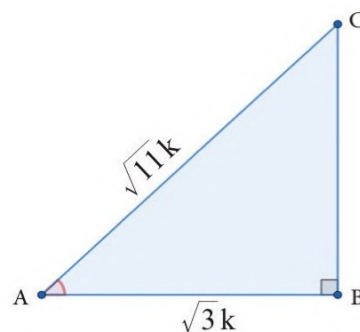
$$\therefore BC = \sqrt{8}k$$

مبرهنة فيثاغورس

بالتعويض

بالتبسيط

نحز الطرفين



$$\text{i) } \cos A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} \Rightarrow \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}} \quad \text{ii) } \sin A = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{11}} \Rightarrow \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{8}}$$

$$\text{iii) } \tan A = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$$

مقلوب النسب المثلثية الاساسية

$$(\sin 45^\circ)(\sec 45^\circ) - (\tan 60^\circ)(\cot 30^\circ) + 2 \csc 90^\circ$$

مثال (6) جد القيمة العددية للمقدار الآتي:

$$\left. \begin{aligned} \sin 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \\ \tan 60^\circ &= \sqrt{3}, \cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \\ \csc 90^\circ &= \frac{1}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned} \right\}$$

من الجداول نجد قيم النسب المثلثية الخاصة ومقلوبات النسب المثلثية الاساسية

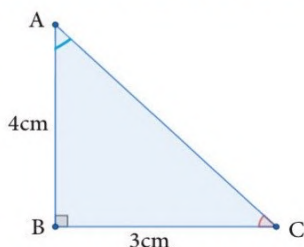
$$(\sin 45^\circ)(\sec 45^\circ) - (\tan 60^\circ)(\cot 30^\circ) + 2 \csc 90^\circ$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2}) - (\sqrt{3})(\sqrt{3}) + 2(1) \Rightarrow 1 - 3 + 2 = 0$$

المقدار المعطى بالتعويض والتبسيط

$\therefore$  الناتج العددي للمقدار يساوي 0

تأكد من فهمك



1 من الشكل المجاور، جد النسب المثلثية الآتية:

$$\text{i) } \sin A \quad \text{ii) } \cos C \quad \text{iii) } \cot C \quad \text{iv) } \sec A$$

السؤال (1) مشابه للامثلة (1,2,5):

2 في المثلث ABC القائم الزاوية في B، اذا كانت  $\cot A = \sqrt{3}$  جد:

i)  $\tan A$  ii)  $\sin A$  iii)  $\csc A$  iv)  $\sec A$  v)  $\cos A$

السؤال (2) مشابه للمثالين 2,5

3 أثبت ما يأتي:

i)  $(\cos 30^\circ - \csc 45^\circ)(\sin 60^\circ + \sec 45^\circ) = -\frac{5}{4}$ , ii)  $2\sin 30^\circ \sec 30^\circ = \csc 60^\circ$

السؤال (3) مشابه

iii)  $(\cos 45^\circ - \csc 45^\circ)(\tan 45^\circ)(\csc 90^\circ) = -\cos 45^\circ$ , iv)  $\sqrt{\frac{1 - \cos 60^\circ}{2}} = \sin 30^\circ$

للمثالين 6,3

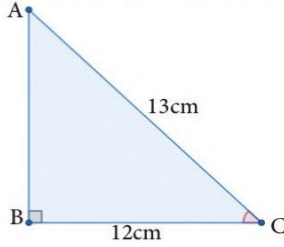
السؤال (4) مشابه  
للمثال 4

4 طائرة ورقية ارتفاعها  $3\sqrt{3}$  m عن سطح الارض، اذا كان الخيط المتصل بها يصنع زاوية مقدارها  $60^\circ$  مع الارض. جد طول الخيط.

### تدرب وحل التمرينات

5 من الشكل المجاور، جد النسب المثلثية الآتية:

i)  $\cot A$  ii)  $\cot C$  iii)  $\sec C$  iv)  $\csc A$



6 في المثلث ABC القائم الزاوية في B، اذا كانت  $\sec A = \sqrt{2}$  جد:

i)  $\sin A$  ii)  $\cot C$  iii)  $\csc A$  iv)  $\cos C$

7 أثبت ما يأتي:

i)  $\cos 60^\circ \csc 60^\circ + \sin 60^\circ \sec 60^\circ = \frac{4}{\sqrt{3}}$  ii)  $\sin 45^\circ \sec 45^\circ + \csc 45^\circ \sin 45^\circ = 2$ ,

### تدرب وحل مسائل حياتية

8 **برج:** سلك يستخدم لتثبيت احد ابراج الاتصالات يشكل زاوية ميل قدرها  $30^\circ$  مع الأرض فإذا كان ارتفاع البرج

12م فما المسافة الافقية بين نهاية السلك على الأرض وقاعدة البرج؟

9 **تزلج على الجليد:** في موقع للتزلج على احد التلال، كان ارتفاع التلة الرئيسية 500m وزاوية ميلها عن مستوى

الارض  $60^\circ$ . ما طول سطح التزلج؟

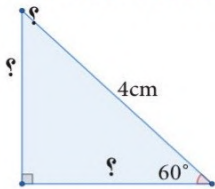
10 **سلم اطفاء الحرائق:** سلم اطفاء حريق طوله 20m يرتكز احد طرفيه على بناية والطرف الآخر على ارض افقية

بزاوية  $45^\circ$ ، جد ارتفاع نقطة ارتكاز طرف السلم على البناية.

11 **حديقة:** وقفت بنان على بعد 25m من قاعدة شجرة ارتفاعها 25m. فما قياس الزاوية التي تشكلها مع قمة الشجرة؟

### فكّر

12 **تحذ:** في الشكل المجاور، جد القيم المؤشرة (?) باستعمال النسب المثلثية.



13 **مسألة مفتوحة:** مثلث قائم الزاوية في B،  $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$  كيف تجد قيمة الزاوية C؟

14 **تبرير:** اذا كان جيب زاوية وجيب تمامها متساويين في مثلث قائم الزاوية. ما

نوع المثلث من حيث اطوال اضلاعه؟

### أكتب

مسألة تستعمل فيها نسبة الجيب لايجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية. ثم حلها.



1 مثل المعادلات التالية في المستوي الاحداثي

i)  $2x - 4y = 8$       ii)  $y = 2$

iii)  $x = 2$       iv)  $y = x^2 - 1$

2 جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين:

A(-2, -3),      B(2, 3)

3 جد المقطع السيني والصادي للمعادلة الآتية:

$y - x = 4$

4 جد معادلة المستقيم لكل مما يأتي:

(i) يمر بالنقطتين:

$(3, -2), (1, 5)$

(ii) ميله  $\frac{3}{2}$  ومقطعه الصادي يساوي -5 .

(iii) ميله  $-\frac{1}{5}$  ومقطعه السيني يساوي 3 .

5 استعمل معادلة الميل والنقطة لتحديد ميل المستقيم واحدى نقاطه  $2y - 3x = 8$

6 في المثلث ABC القائم الزاوية في B، اذا كانت  $\sin A = \frac{1}{2}$  جد:

i)  $\cos A$

ii)  $\tan A$

iii)  $\cot C$

iv)  $\sec A$

## الهندسة والقياس

## Geometry and Measurement

الدرس 5-1 المضلعات والمجسمات (الهرم والمخروط)

الدرس 5-2 المثلثات

الدرس 5-3 التناسب والقياس في المثلثات

الدرس 5-4 الدائرة

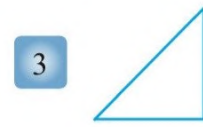
الدرس 5-5 المثلث والدائرة، القطع المستقيمة والدائرة

الدرس 5-6 الزوايا والدائرة

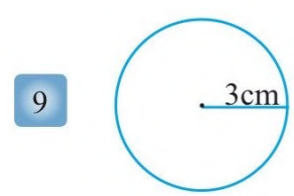
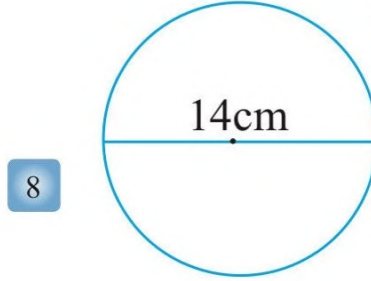
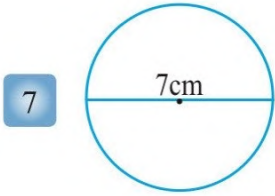
الاشكال المثلثة تعطي البناء قوة ومتانة حيث تميزت الكثير من اعمال الراحلة المهندسة العراقية زها حديد باستعمالها الاشكال الهندسية المثلثة، ومنها جسر في ابو ظبي بلغ ارتفاع راس المثلث 60m فوق مستوى سطح البحر.



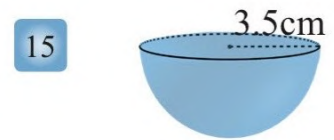
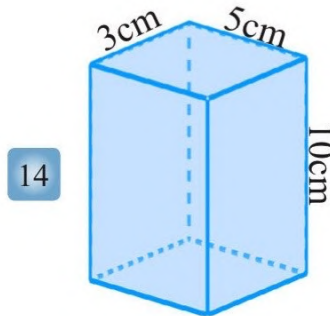
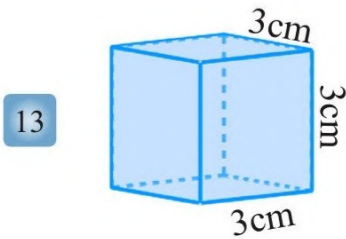
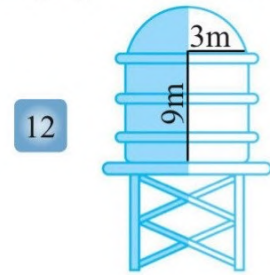
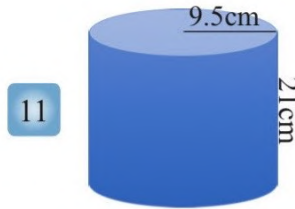
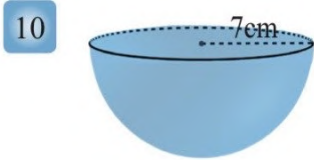
حدد ما اذا كان الشكل مضلعاً وإذا كان كذلك فهل هو مضلع منتظم او مضلع غير منتظم .



جد مساحة كل دائرة ومحيطها مما يأتي:



جد المساحة السطحية والحجم لكل مما يأتي:



جد قيمة x في كل مما يأتي :

16

$$\frac{7}{6} = \frac{x-3}{2}$$

17

$$\frac{7}{x} = \frac{1}{2}$$

18

$$\frac{3}{16} = \frac{x}{4}$$

جد قياس الزاوية المركزية ومجموع قياس الزوايا الداخلية والخارجية لكل مما يأتي:

21 سداسي منتظم

20 ثماني منتظم

19 خماسي منتظم

22 شركة تجارية تضم 20 موظفاً، وكانت نسبة الذكور الى الاناث  $\frac{3}{2}$  ، كم عدد الموظفين من الاناث؟ وكم عددهم من الذكور؟

23 مثلث متساوي الاضلاع طول كل ضلع فيه يساوي  $(2x - 1)$  cm ومحيط المثلث يساوي 57cm، جد قيمة x و جد طول كل ضلع فيه.



### تعلم

تعرفت سابقاً الى المضلعات المنتظمة وغير المنتظمة وكيفية ايجاد الزوايا الداخلية والخارجية للمضلع المنتظم وكذلك تعرفت على كيفية ايجاد الزاوية المركزية للمضلع. واستطعت التمييز بين المضلع المقعر والمضلع المحدب وسوف تتمكن في هذا الدرس من ايجاد مساحة ومحيط المضلعات المنتظمة.

### فكرة الدرس

- اجد محيط ومساحة المضلعات المنتظمة.
- اجد الحجم والمساحة الكلية لكل من الهرم والمخروط.

### المفردات

- العائد
- الارتفاع الجانبي
- المخروط
- الهرم

## Regular Polygons

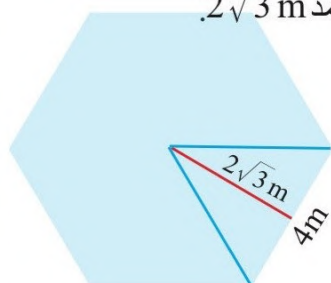
## [5-1-1] المضلعات المنتظمة

|  |                                       |                                                                                                                     |
|--|---------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | $P = n \times L$                      | <p>محيط المضلع المنتظم = عدد الاضلاع مضروباً في طول الضلع.</p>                                                      |
|  | $A = \frac{1}{2} L \times H \times n$ | <p>مساحة المضلع المنتظم = مساحة المثلث الذي رأسه مركز المضلع وقاعدته ضلع المضلع <math>\times</math> عدد اضلاعه.</p> |

اذا عرفت ان طول الضلع  $L$  و العائد  $H$  (هو العمود النازل من مركز المضلع على احد اضلاع المضلع). يمكن حساب مساحة المثلث كما يأتي: مساحة المثلث  $= \frac{1}{2} \times$  القاعدة  $\times$  الارتفاع (العائد)،  $A = \frac{1}{2} L \times H$

### مثال (1)

جد محيط ومساحة الشكل السداسي المنتظم، طول ضلعه  $4m$  وطول العائد  $2\sqrt{3}m$ .



$$P = n \times L$$

$$P = 6 \times 4 = 24m$$

$$A = \frac{1}{2} L \times H \times n$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} \times 6 = 24\sqrt{3}m^2$$

باستعمال قانون محيط المضلع

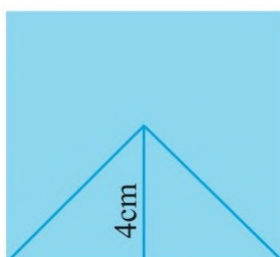
محيط المضلع

باستعمال قانون مساحة المضلع

بالتعويض والتبسيط

### مثال (2)

جد مساحة المربع الذي طول العائد فيه  $4cm$ .



$$A = \frac{1}{2} L \times H \times n$$

$$L = 4 \times 2 = 8cm$$

$$A = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 \times 4 = 64cm^2$$

$$A = L \times L$$

$$A = 8 \times 8 = 64cm^2$$

طريقة (1): باستعمال قانون مساحة المضلع المنتظم

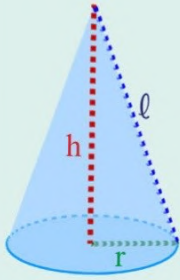
طول ضلع المربع يساوي ضعف طول العائد

طريقة (2): باستعمال قانون مساحة المربع

(طول الضلع  $\times$  نفسه)



**المخروط:** هو مجسم له قاعدة واحدة فقط عبارة عن دائرة وله رأس واحد.



$l$  = الارتفاع الجانبي (مولد المخروط)

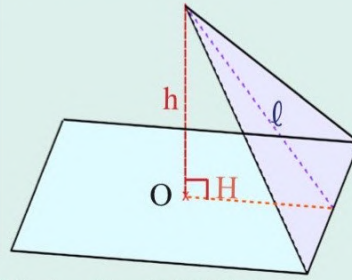
$h$  = الارتفاع

$r$  = نصف القطر

$$l^2 = h^2 + r^2$$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة.

**الهرم:** هو مجسم له في الاقل ثلاثة اوجه مثلثة الشكل وله قاعدة واحدة تعبر عن شكل مضلع (شكل القاعدة



يحدد اسم الهرم).

$h$  = الارتفاع

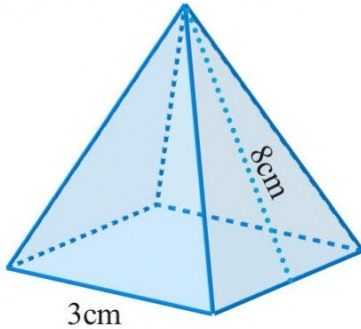
$H$  = العامد

$l$  = الارتفاع الجانبي

$$l^2 = h^2 + H^2$$

| قانون الحجم في الهرم والمخروط      |               | قانون المساحة للهرم المنتظم والمخروط الدائري القائم |                                   |                  |
|------------------------------------|---------------|-----------------------------------------------------|-----------------------------------|------------------|
| المخروط القائم                     | الهرم المنتظم |                                                     |                                   |                  |
| $V = \frac{1}{3} b \times h$       | حجم الهرم     | $LA = \pi r \times l$                               | $LA = \frac{1}{2} p \times l$     | المساحة الجانبية |
|                                    |               |                                                     | $p$ محيط القاعدة                  |                  |
| $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$ | حجم المخروط   | $TA = \pi r \times l + \pi r^2$                     | $TA = \frac{1}{2} p \times l + b$ | المساحة الكلية   |
|                                    |               |                                                     | $b$ مساحة القاعدة                 |                  |

**مثال (3)** جد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لهرم منتظم ارتفاعه الجانبي 8cm وقاعدته مربعة طول ضلعها 3cm.



$$LA = \frac{1}{2} p \times l$$

$$LA = \frac{1}{2} \times 12 \times 8$$

$$LA = 48cm^2$$

$$TA = \frac{1}{2} p \times l + b$$

$$TA = 48 + 9 = 57cm^2$$

$$TA = 57cm^2$$

المساحة الجانبية

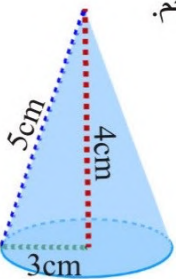
محيط القاعدة = محيط المربع =  $4 \times 3$

المساحة الكلية

مساحة القاعدة = مساحة المربع =  $3 \times 3$

المساحة الكلية

**مثال (4)** استخدم الشكل المجاور لإيجاد: (i) المساحة الجانبية (ii) المساحة الكلية (iii) الحجم.



$$i) LA = \pi r \times l$$

$$= \pi \times 3 \times 5 = 15\pi cm^2$$

$$ii) TA = \pi r \times l + \pi r^2$$

$$= 15\pi + 9\pi = 24\pi cm^2$$

$$iii) V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times 9 \times 4 = 12\pi cm^3$$

المساحة الجانبية للمخروط

بالتعويض والتبسيط

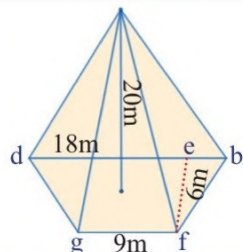
المساحة الكلية للمخروط

بالتعويض والتبسيط

حجم المخروط

بالتعويض والتبسيط

**مثال (5)** جد حجم الهرم المجاور.



$$b = \frac{1}{2} (gf + bd) \times fe = \frac{1}{2} (9 + 18) \times 6 = 81m^2$$

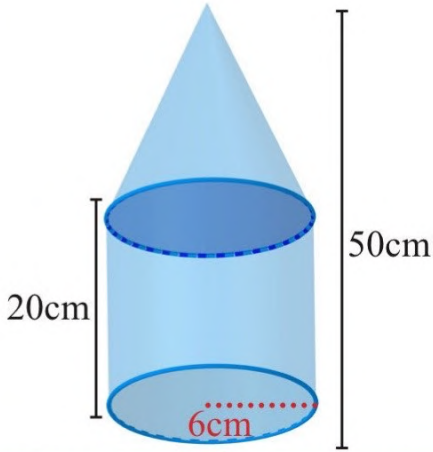
$$V = \frac{1}{3} b \times h = \frac{1}{3} \times 81 \times 20 = 540m^3$$

مساحة شبه المنحرف

حجم الهرم

## مثال (6)

جد حجم المجسم المركب المجاور.



لايجاد حجم المجسم المركب نجد اولا حجم الاسطوانة وحجم المخروط وبعد ذلك نجمع الحجوم لنجد حجم المجسم المركب.

$$V_1 = \pi r^2 h \Rightarrow V_1 = 36\pi \times 20$$

$$V_1 = 720\pi \text{ cm}^3$$

$$V_2 = \frac{1}{3} r^2 \pi \times h$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \times 36\pi \times 30 = 360\pi \text{ cm}^3$$

$$V = V_1 + V_2$$

$$V = 720\pi + 360\pi = 1080\pi \text{ cm}^3$$

قانون حجم الاسطوانة

بالتعويض والتبسيط

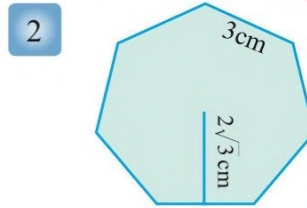
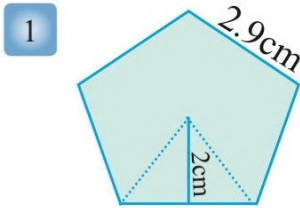
قانون حجم المخروط

بالتعويض والتبسيط

حجم المجسم المركب

جد محيط ومساحة كل مضلع منتظم:

تأكّد من فهمك



الاسئلة 1-2 مشابهة  
للمثال 1

3 جد الحجم والمساحة الجانبية والكلية لكل مما يأتي:

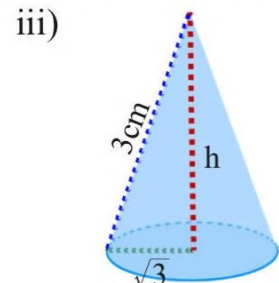
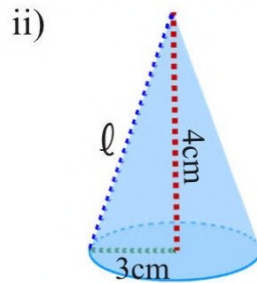
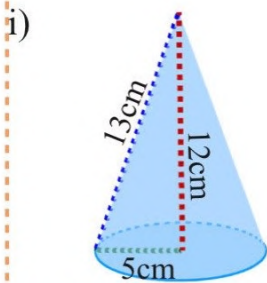
- (i) مخروط دائري قائم: مساحة قاعدته  $225\pi \text{ cm}^2$ ، محيط قاعدته  $30\pi \text{ cm}$ ، ارتفاعه  $20 \text{ cm}$ ، ارتفاعه الجانبي  $25 \text{ cm}$   
(ii) هرم: مساحة قاعدته  $54\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ، محيط قاعدته  $36 \text{ cm}$ ، ارتفاعه  $3\sqrt{6} \text{ cm}$ ، ارتفاعه الجانبي  $9 \text{ cm}$ .

الاسئلة (3-4) مشابهة  
للمثالين 3,4

4 جد الحجم والمساحة الجانبية والكلية لكل مما يأتي:

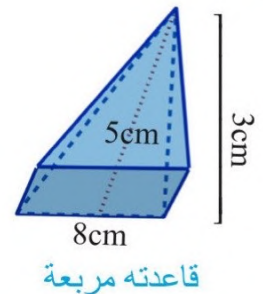
- (i) هرم قاعدته مربعة طول ضلعها  $12 \text{ cm}$  وارتفاعه  $8 \text{ cm}$  وارتفاعه الجانبي  $10 \text{ cm}$ .

5 جد الحجم والمساحة الجانبية والكلية مستعملاً الاشكال ادناه.



السؤال 6 مشابه  
للمثال 5

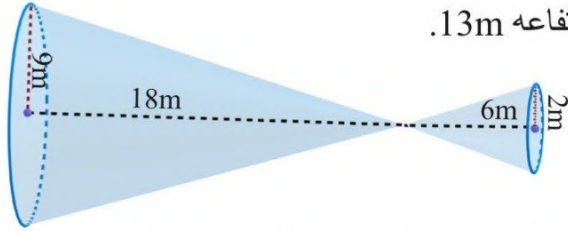
6 جد الحجم والمساحة الجانبية والمساحة الكلية للشكل ادناه:





## تدرب وحل التمرينات

- 7 جد المساحة الجانبية للهرم الذي قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها 8cm وارتفاعه الجانبي 7.2cm .
- 8 جد المساحة الجانبية للهرم الذي قاعدته المضلع الثماني المنتظم الذي قياس طول ضلعه 1.16cm وارتفاعه الجانبي 2cm.
- 9 جد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لمخروط دائري قائم قطر قاعدته 35m وارتفاعه الجانبي 20m واكتب الجواب بدلالة  $\pi$  .



- 10 جد حجم هرم قاعدته مثلث منتظم وطول ضلعه 6m وارتفاعه 13m.

- 11 جد حجم الشكل المركب المجاور.

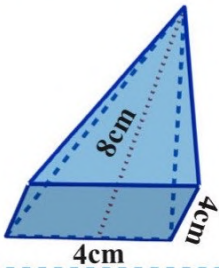
## تدرب وحل مسائل حياتية



- 12 **علوم:** نموذج بركاني على شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته 3cm، اذا كان حجم النموذج  $203\text{cm}^3$  تقريباً، ما ارتفاعه؟



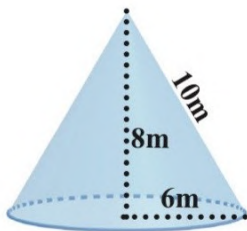
- 13 **بناء:** يبلغ ارتفاع برج العرب 321m ويمثل هرمًا مقوساً، احسب المساحة التقريبية لقاعدته اذا كان حجم الهرم الذي يمثلته  $1904000\text{m}^3$  .



- 14 **هندسة:** جد المساحة الجانبية للهرم الذي قاعدته مربعة الشكل والمبين بالشكل المجاور.

## فكّر

- 15 **تحّد:** مخروط واسطوانة لهما نفس القاعدة والحجم، قطر الاسطوانة 40cm وارتفاعها 7cm، ما المساحة الجانبية للمخروط؟



- 16 **اكتشف الخطأ:** اي الحلين خطأ؟ وضح اجابتك .

**الحل الثاني:**

$$V = \frac{1}{3} \times b \times h$$

$$V = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times \pi \times 8 = 96\pi\text{m}^3$$

**الحل الاول:**

$$V = \frac{1}{3} \times b \times h$$

$$V = \frac{1}{3} \times 36\pi \times 10 = 120\pi\text{m}^3$$

مسألة عن مضلع منتظم تسمح المعطيات فيه بإيجاد محيط المضلع ومساحته.

**أكتب**



# Triangles

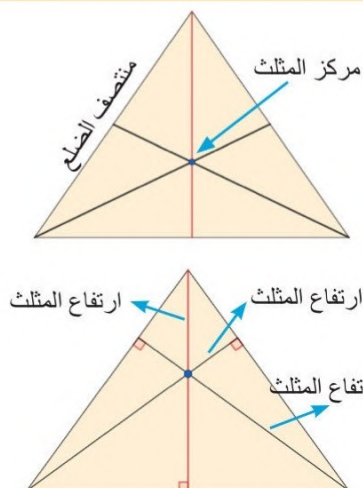
## تعلم

## فكرة الدرس

- التعرف الى منصفات الزوايا والقطع المتوسطة للمثلث وكيفية تشابه مثلثين واستعمال التشابه في حل المسائل.

## المفردات

- المثلثان المتشابهان.
- نسبة التشابه



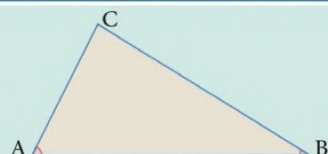
تعرفت سابقا الى خواص المثلث وسنتعرف في هذا الدرس الى القطعة المتوسطة في مثلث: هي قطعة مستقيمة طرفيها احد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس، ولكل مثلث ثلاث قطع متوسطة تتقاطع في نقطة واحدة تسمى نقطة تلاقي القطع المتوسطة للمثلث (مركز المثلث). ارتفاع المثلث: هو العمود النازل من احد رؤوس المثلث على المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس، ولكل مثلث ثلاثة ارتفاعات تتقاطع في نقطة واحدة تسمى (ملتقى الارتفاعات).

## Sides and Angles in the Triangle

## [5-2-1] الاضلاع والزوايا في المثلث

(مبرهنات من دون برهان) في كل مثلث:

**مبرهنة:** اذا تباین ضلعا مثلث تباینت الزاويتان المقابلتان لهما، فأكبرهما تقابل الضلع الأكبر وبالعكس.  $BC > AC \Leftrightarrow m\angle A > m\angle B$



ii - في المثلث ادناه رتب الاضلاع من الاقصر الى الاطول واحسب قياس  $\angle C$ .

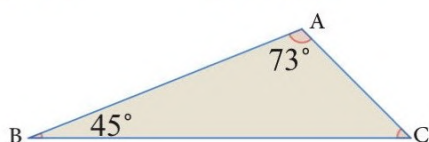
$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ \quad \text{مجموع زوايا المثلث}$$

$$m\angle C = 180^\circ - (73^\circ + 45^\circ) = 62^\circ$$

$$\therefore m\angle B < m\angle C < m\angle A$$

$$\overline{AC}, \overline{BA}, \overline{BC}$$

الترتيب هو:

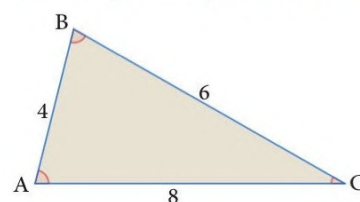


i - في المثلث ادناه رتب الزوايا من الاصغر الى الاكبر.

الضلع الاقصر  $\overline{AB}$  اذن الزاوية الصغرى  $\angle C$

الضلع الاطول  $\overline{AC}$  اذن الزاوية الكبرى  $\angle B$

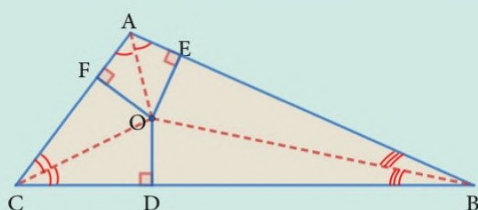
الترتيب هو  $m\angle C, m\angle A, m\angle B$



(مبرهنات من دون برهان) في كل مثلث:

**مبرهنة:** منصفات زوايا المثلث تتلاقى بنقطة واحدة تكون متساوية الابعاد عن اضلاعه. (والعكس صحيح).

اذا كان  $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$  منصفات الزوايا A, B, C على الترتيب، تلتقي في نقطة O، فان:  $OD=OE=OF$



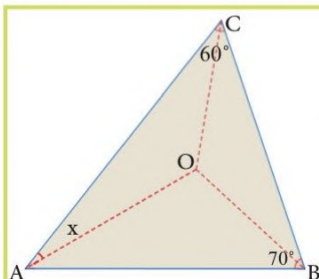
**مثال (2)** في المثلث المجاور جد قيمة x.

$\overline{BO}$  تنصف  $\angle B$ ,  $\overline{CO}$  تنصف  $\angle C$ ,  $\therefore O$  نقطة التقاء منصفات زوايا المثلث ABC

$$\overline{AO} \text{ تنصف } \angle A \quad (\angle A \text{ تنصف } x = \frac{1}{2} m\angle A \text{ مبرهنة})$$

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ \quad \text{مجموع زوايا المثلث}$$

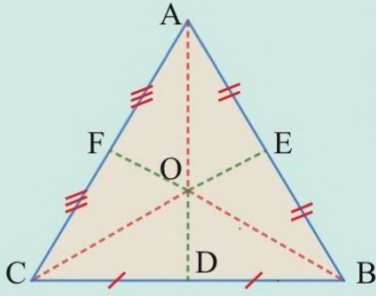
$$m\angle A = 180^\circ - (70^\circ + 60^\circ) = 50^\circ \Rightarrow \therefore x = 25^\circ$$





(مبرهنات من دون برهان) في كل مثلث:

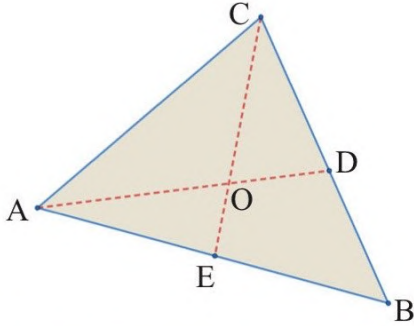
**مبرهنة:** القطع المستقيمة المتوسطة للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة تسمى مركز ثقل المثلث، تقسم كل منها بنسبة  $\frac{2}{3}$  من جهة الرأس الى منتصف الضلع المقابل.



$$AO = \frac{2}{3}AD, BO = \frac{2}{3}BF, CO = \frac{2}{3}CE$$

$$OD = \frac{1}{3}AD, OF = \frac{1}{3}BF, OE = \frac{1}{3}CE$$

**مثال (3)** المثلث ABC فيه  $\overline{AD}$ ,  $\overline{CE}$  قطعتان متوسطتان يلتقيان في نقطة O،  $CE = 9\text{cm}$ ,  $AD = 6\text{cm}$ ، جد طول  $\overline{AO}$ ,  $\overline{OE}$ .



$$OE = \frac{1}{3}CE$$

CE قطعة متوسطة

$$\therefore OE = \frac{1}{3} \times 9 = 3\text{cm}$$

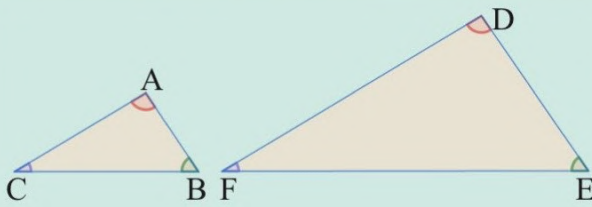
$$\therefore OA = \frac{2}{3}AD$$

$$\therefore OA = \frac{2}{3} \times 6 = 4\text{cm}$$

كذلك AD قطعة متوسطة

## Similarity of Triangles

## [5-2-2] تشابه المثلثات



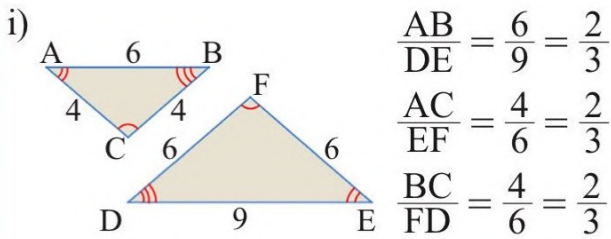
**المثلثان المتشابهان:** هما مثلثان تتطابق زواياهما وتتناسب اضلعهما ويرمز للتشابه بالرمز ( $\sim$ ). المبرهنات من دون برهان **مبرهنة:** اذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر فان المثلثين يتشابهان.

$$m\angle A = m\angle D, m\angle C = m\angle F, \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

**مبرهنة:** اذا تناسبت ثلاثة اضلاع من مثلث مع ثلاثة اضلاع من مثلث آخر فان المثلثين يتشابهان.

## مثال (4)

بيّن ما اذا كان المثلثين في الشكل المجاور متشابهان، واكتب نسبة التشابه.

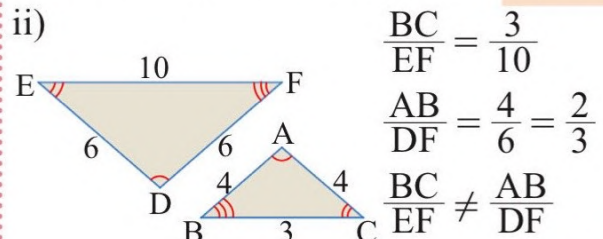


$$\frac{AB}{DE} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AC}{EF} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{BC}{FD} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

اذن المثلثان متشابهان



$$\frac{BC}{EF} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{AB}{DF} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

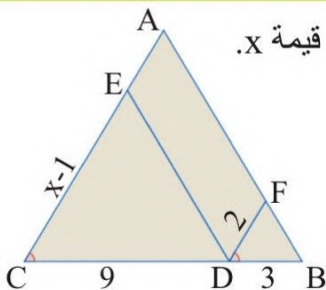
$$\frac{BC}{EF} \neq \frac{AB}{DF}$$

اذن المثلثان غير متشابهان

**مبرهنة:** اذا تناسبت ضلعان في مثلث مع نظائريهما في مثلث آخر، وتطابقت الزاوية المحصورة بينهما مع نظيرتها فان المثلثين يتشابهان.

## مثال (5)

في الشكل المجاور: اذا كان  $\frac{EC}{FD} = \frac{CD}{DB}$ ،  $m\angle C = m\angle FDB$ ، جد قيمة x.



بما ان المثلثين BFD, DEC متشابهان، اذن اضلعهما المتناظرة متناسبة.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{9}{3}$$

$$3x - 3 = 18$$

$$3x = 21 \Rightarrow x = 7$$

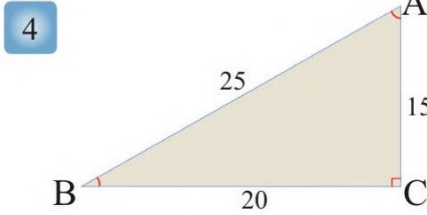
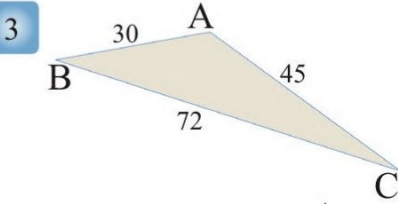
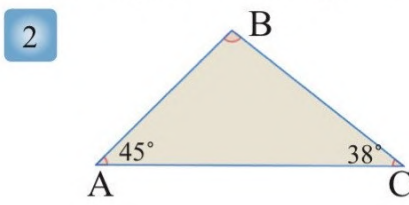
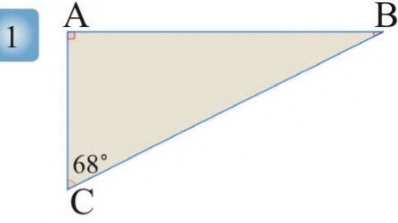
التناسب

الضرب التبادلي

التبسيط

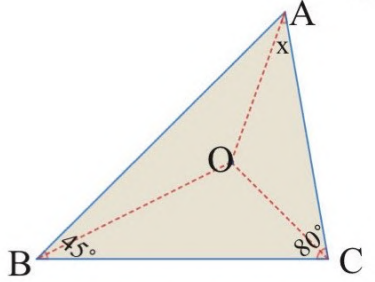
## تأكّد من فهمك

رتب الاضلاع من الاقصر الى الاطول



رتب الزوايا من الاصغر الى الاكبر.

الاسئلة 4-1 مشابهة  
للمثال 1



5 في المثلث المجاور اذا كان  $\overline{AO}$ ,  $\overline{BO}$ ,  $\overline{CO}$  منصفات الزوايا A,B,C  
جد  $m\angle x$ .

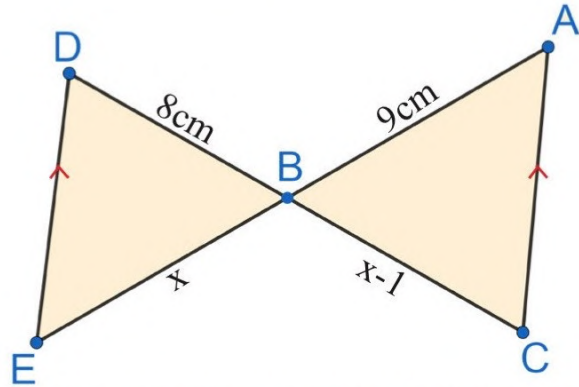
السؤال 5 مشابه  
للمثال 2

6 ABC مثلث، O نقطة تقاطع مستقيماته المتوسطة، اذا كان:  $BO = 12\text{cm}$  جد طول القطعة المستقيمة التي احد طرفيها النقطة B.

الاسئلة 6-7  
مشابهة للمثال 3

7 في المثلث ABC، O نقطة التقاء القطع المتوسطة، جد طول  $\overline{AD}$  اذا علمت ان:  
 $m\angle COB = 90^\circ$ ,  $\overline{AO} \cap \overline{BC} = \{D\}$ ,  $BC = 6\text{cm}$

ملاحظة: طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة الى منتصف الوتر يساوي نصف طول الوتر.



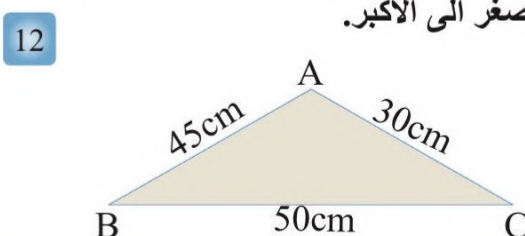
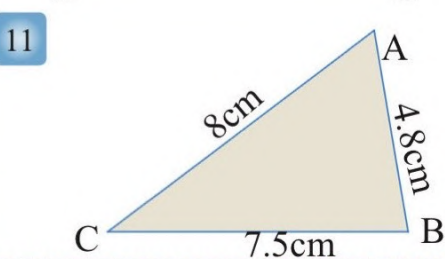
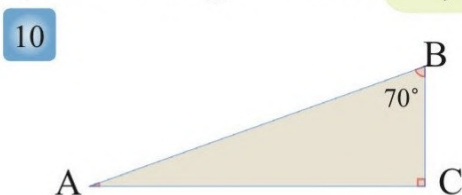
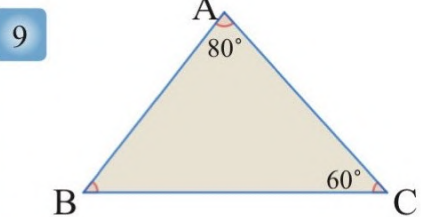
8 في الشكل المجاور:

- بيّن ان المثلثين ABC, BDE متشابهان.
- جد قيمة x.
- جد نسبة التشابه.

السؤال 8 مشابه  
للمثالين 4,5

## تدرب وحلّ التمرينات

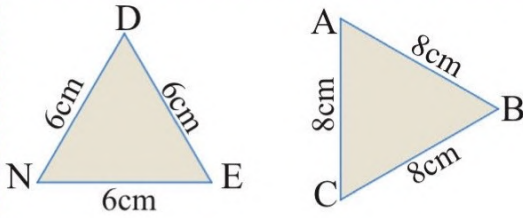
رتب الاضلاع من الاقصر الى الاطول.



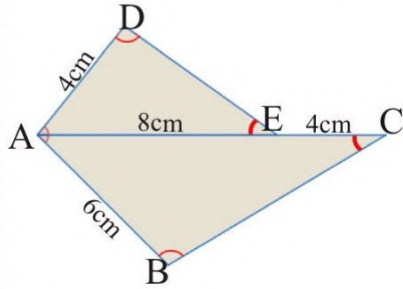
رتب الزوايا من الاصغر الى الاكبر.



13 بيّن ان المثلثين ABC, DEN في الشكل المجاور متشابهان واكتب نسبة التشابه.

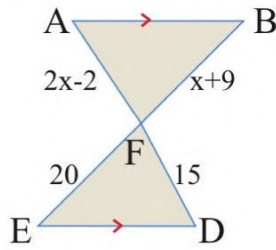


14 بيّن ان المثلثين ABC, ADE في الشكل المجاور متشابهان واكتب نسبة التشابه.

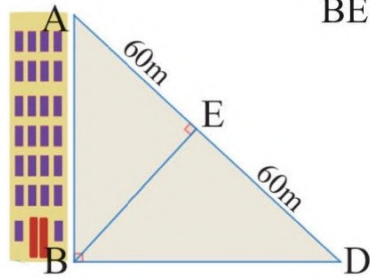


### تدرب وحل مسائل حياتية

15 **هندسة:** اذا علمت ان  $\triangle ABF \sim \triangle DEF$  وان  $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$  استعمل المعلومات في الشكل المجاور لتجد قيمة  $x$ .

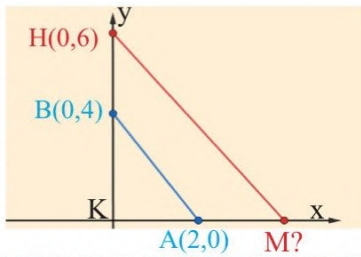


16 **بنية:** بناية ارتفاعها يمثل بضلع مثلث قائم الزاوية كما في الشكل المجاور. و BE هو ارتفاع للمثلث ABD برهن ان:



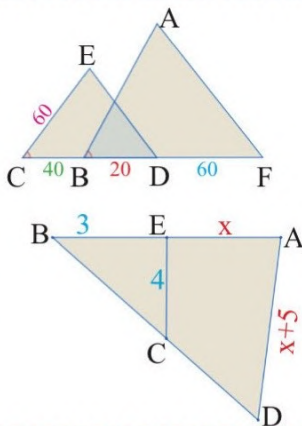
- $\angle EBA \cong \angle D$
- $\triangle ABE \sim \triangle DBE$

17 في الشكل المجاور المثلثان KAB, KMH متشابهان، جد احداثي M ونسبة التشابه.



### فكر

18 **اكتشف:** ما طول  $\overline{AB}$  في الرسم المجاور؟ علماً ان  $\triangle ECD \sim \triangle ABF$ .



19 **تحديد:** (2, 5, 10) و (6, 15, x) هي اطوال اضلاع متناظرة

في مثلثين متشابهين، ما قيمة  $x$  ؟

20 **حس عددي:** جد قيمة  $x$  في الشكل المجاور. اذا كان المثلثان ABD, EBC متشابهين. وان:  $\overline{EC} \parallel \overline{AD}$

21 **مسألة مفتوحة:** اشرح لماذا تحتاج قياسات الزوايا للتأكد من تشابه المثلثات، اعط مثلاً على ذلك.

مسألة عن مثلثين متساويي الساقين تتطابق فيهما زاويتا الرأس وجد نسبة التشابه.

### اكتب

## Proportion and Measure in Triangles

### تعلم



تتضمن مخططات المدن والشوارع في تطبيق الخرائط في الأجهزة الإلكترونية خطوطاً متوازية وأخرى متعامدة، فالمخطط الجانبي يمثل جزءاً من مدينة بغداد ونلاحظ فيه الشوارع متوازية ومتعامدة.

### فكرة الدرس

- استعمل الأجزاء المتناسبة في المثلثات لنبرهن توازي مستقيمين أو أكثر.
- استعمل التناسب لإيجاد قياسات مجهولة.
- استعمل التناسب الهندسي في المستوي الإحداثي.

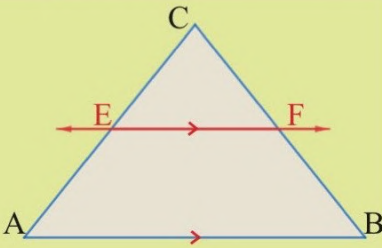
### المفردات

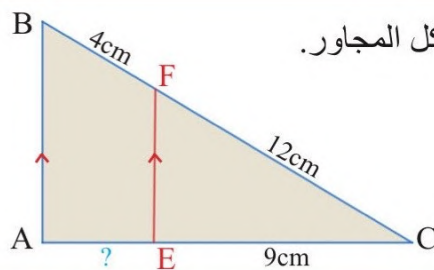
التناسب الهندسي

## Proportions in Triangles

## [5-3-1] التناسب في المثلثات

تعلمت سابقاً المثلثات المتشابهة وبعض مبرهنات التشابه للمثلثات، وسوف نتعلم في هذا البند التناسب في المثلثات مستعيناً بالمبرهنات السابقة.

| مبرهنة التناسب المثلثي          |                                                                                                                                 |                                                                                                                                      |
|---------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| النتيجة                         | المعطى                                                                                                                          | المبرهنة                                                                                                                             |
| $\frac{CE}{EA} = \frac{CF}{FB}$ | $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$<br> | إذا وازى مستقيم ضلعاً من أضلاع مثلث وقطع الضلعين الآخرين في نقطتين مختلفتين فإنه يقسم الضلعين إلى قطع متناسبة الأطوال (من دون برهان) |



مثال (1) جد طول قطعة المستقيم AE علماً أن:  $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$  في الشكل المجاور.

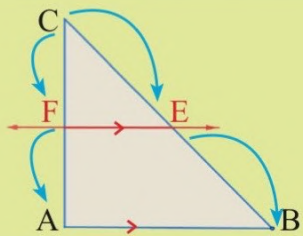
$$\frac{CE}{EA} = \frac{CF}{FB}$$

$$\frac{9}{EA} = \frac{12}{4} \Rightarrow EA = \frac{4 \times 9}{12} = \frac{36}{12} = 3\text{cm}$$

مبرهنة التناسب المثلثي

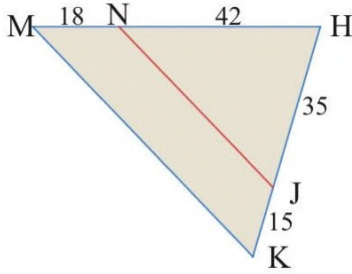
التعويض

والتبسيط

| عكس مبرهنة التناسب المثلثي              |                                                                                                                        |                                                                                            |
|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| النتيجة                                 | المعطى                                                                                                                 | المبرهنة                                                                                   |
| $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ | $\frac{CE}{EB} = \frac{CF}{FA}$<br> | إذا قسم مستقيم ضلعين في مثلث إلى قطع متناسبة فإنه يكون موازياً للضلع الثالث (من دون برهان) |



### مثال (2)



$$\frac{HJ}{JK} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}, \quad \frac{HN}{NM} = \frac{42}{18} = \frac{7}{3}$$

$$\therefore \frac{HJ}{JK} = \frac{HN}{NM} = \frac{7}{3}$$

$$\therefore \overline{MK} \parallel \overline{NJ}$$

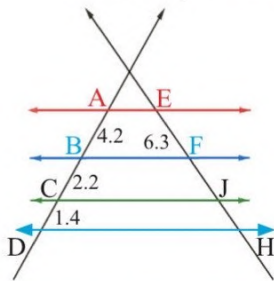
نجد نسبة الاجزاء المتناسبة

عكس مبرهنة التناسب المثلثي

| مبرهنة طالس                     |        |                                                                                                           |
|---------------------------------|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| النتيجة                         | المعطى | المبرهنة                                                                                                  |
| $\frac{AB}{BC} = \frac{DF}{FE}$ |        | إذا قطعت ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر بمستقيمين فإن القطع المحددة بالمستقيمتين المتوازيات تكون متناسبة. |

### مثال (3)

استعمل مهندس الرسم المنظوري (هو رسم الاجسام البعيدة بحيث تبدو اصغر والاجسام القريبة حيث تبدو اكبر، مع الحفاظ على هيئتها وتناسب مقاييسها لتبدو ثلاثية الابعاد) ليرسم خطوطاً اولية تساعد على رسم اعمدة اتصالات متوازية، تحقق من رسمه بقياس المسافات بين الاعمدة، كم طول  $\overline{FH}$  ؟



$$\overline{AE} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{CH} \parallel \overline{DH}$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{EF}{FH}$$

$$BD = BC + CD = 2.2 + 1.4 = 3.6m$$

$$\frac{4.2}{3.6} = \frac{6.3}{FH} \Rightarrow FH = \frac{6.3 \times 3.6}{4.2} = 5.4m$$

مبرهنة طالس

بالتعويض والتبسيط

## Proportion and Measure

## [5-3-2] التناسب والقياس

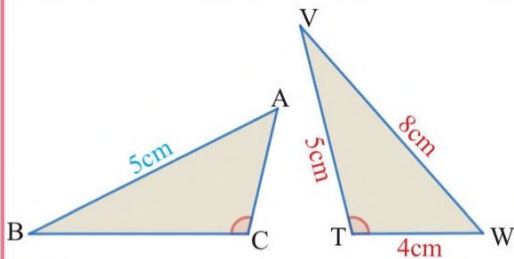
لايجاد نسبة المحيطين ونسبة المساحتين لمثلثان متشابهان، يمكنني استعمال المبرهنة التالية (من دون برهان).

**مبرهنة:** اذا تشابه مثلثان بنسبة تشابه  $\frac{a}{b}$  فإن نسبة المحيطين للمثلثين تساوي  $\frac{a}{b}$  ونسبة المساحتين للمثلثين  $\frac{a^2}{b^2}$

اذا كان المثلثان متشابهين، فإن النسبة بين محيطيهما تساوي النسبة بين اطوال الاضلاع المتناظرة.

### مثال (4)

ليكن  $\triangle WVT \sim \triangle ABC$  جد محيط  $\triangle ABC$ .



$$P_1 = 8 + 5 + 4 = 17cm$$

نفرض  $P_1$  محيط المثلث WVT

$$P_2$$

استعمل التناسب لاجد محيط المثلث ABC

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{AB}{WV} \Rightarrow \frac{P_2}{17} = \frac{5}{8}$$

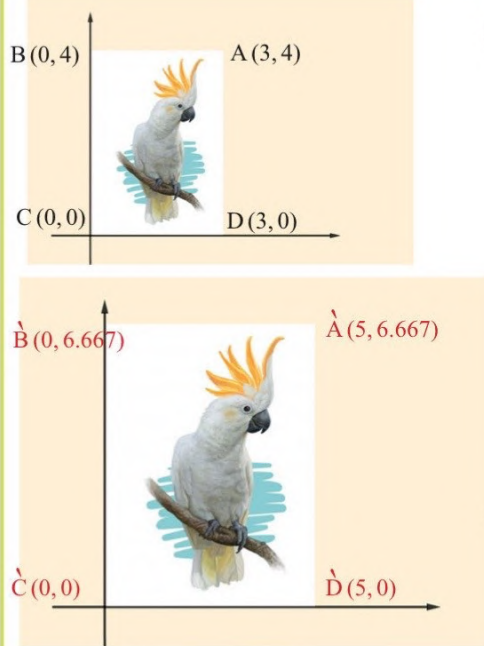
نفرض  $P_2$  محيط المثلث ABC

$$\therefore P_2 = 10.625cm$$

اذن محيط المثلث ABC يساوي

تعلمت سابقاً ثلاثة تحويلات هندسية: الانسحاب، الانعكاس، والدوران، وهذه التحويلات تحافظ على الهيئة والقياسات. سوف نتعلم في هذا الدرس تحويلاً جديداً يحافظ على الهيئة من دون حفظ القياسات، انه التناسب الهندسي Dilation.

**التناسب الهندسي:** هو تحويل يغير مقاييس الاشكال الهندسية من دون تغيير هيئتها فالشكل وصورته بالتناسب الهندسي يكونان دائماً متشابهين، مركز التناسب هو نقطة الاصل. سنقتصر دراسة التناسب الهندسي في هذا الدرس على المستوي الاحداثي، اذا تعاملت مع تناسب هندسي معاملته الهندسي M فسوف يكون بإمكانك ان تجد صورة النقطة بضرب احداثياتها في M.  $(x, y) \rightarrow (Mx, My)$



**مثال (5)** يبين الرسم المجاور موقع صورة على شبكة الانترنت، ارسم حدود الصورة بعد تحويلها بتناسب هندسي نسبته  $\frac{5}{3}$ .

**الخطوة (1):** اضرب معامل التناسب الهندسي في احداثيات الرؤوس.

$$A(3,4) \rightarrow \left(\frac{5}{3} \times 3, \frac{5}{3} \times 4\right) \rightarrow \hat{A}(5,6.667)$$

$$B(0,4) \rightarrow \left(\frac{5}{3} \times 0, \frac{5}{3} \times 4\right) \rightarrow \hat{B}(0,6.667)$$

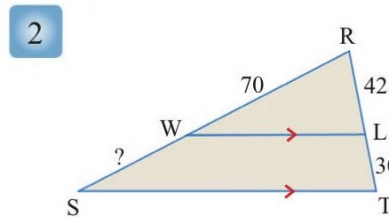
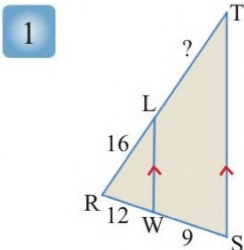
$$C(0,0) \rightarrow \left(\frac{5}{3} \times 0, \frac{5}{3} \times 0\right) \rightarrow \hat{C}(0,0)$$

$$D(3,0) \rightarrow \left(\frac{5}{3} \times 3, \frac{5}{3} \times 0\right) \rightarrow \hat{D}(5,0)$$

**الخطوة (2):** اضع النقاط  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$  على المستوي الاحداثي ثم اصل بينهم لاحصل على المستطيل  $\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}$ .

جد طول القطعة المستقيمة المجهولة في الاشكال الاتية:

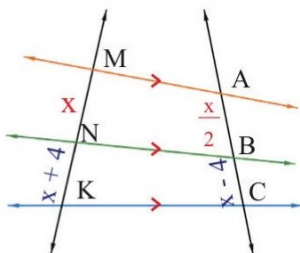
تأكّد من فهمك



الاسئلة 1-2 مشابهة  
للمثلة 1-3

الاسئلة 3-4 مشابهة  
للمثال 2

**3** في المثلث  $\triangle MNP$ ،  $MN = 9$ ،  $MP = 25$ ،  $MR = 4.5$ ،  $MQ = 12.5$  هل  $\overline{RN} \parallel \overline{QP}$  او لا؟ برّر اجابتك.  
حيث  $N \in \overline{MP}$ ،  $R \in \overline{MQ}$

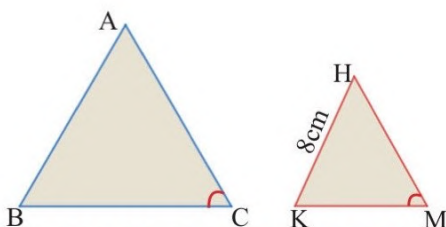


**4** في الرسم المجاور جد طول  $\overline{KN}$ ،  $\overline{MN}$

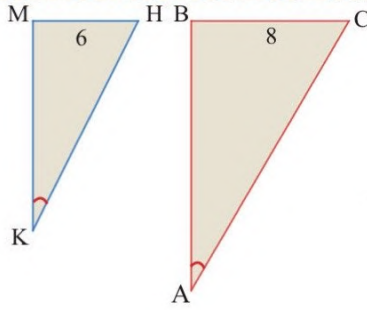
السؤال 4 مشابه  
للمثال 3

**5** المثلثان  $\triangle ABC$ ،  $\triangle HKM$  متشابهان، مساحة  $\triangle ABC$  ضعف مساحة  $\triangle HKM$ ، ما طول  $\overline{AB}$  ؟

السوالين 5,6 مشابهان  
للمثالين 4,5







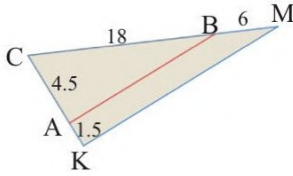
6 المثلثان  $KMH, ABC$  متشابهان، جد مساحة ومحيط المثلث  $ABC$  علماً أن محيط المثلث  $KMH$  يساوي  $18\text{cm}$  ومساحته  $15\text{cm}^2$ . السؤال 6 مشابه للمثال 4

7 المثلث  $ABC$  حيث  $A(6, 0), B(-3, \frac{3}{2}), C(3, -6)$ ، جد صورته بعد تصغيره بمعامل  $\frac{1}{3}$ ، علماً أن مركز التناسب هو نقطة الاصل.

السؤال 7 مشابه للمثال 5

### تدرب وحل التمرينات

8 في المثلث  $ACD$ ،  $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$  جد قيمة  $x$  و  $\overline{ED}$  اذا كان:  $AB = 2, AE = 3, BC = 8, ED = 3x - 3$ .

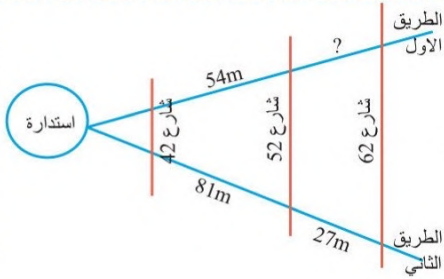


9 حدّد ما اذا كان  $\overline{AB} \parallel \overline{MK}$  في الشكل المجاور.

10 نسبة مساحة المثلث  $ABC$  الى نسبة مساحة المثلث  $KMH$  تساوي  $\frac{16}{25}$  ما نسبة تشابه المثلثين وما النسبة التشابه بين محيطيهما؟

11 جد صورة المثلث  $ABC$  حيث:  $A(-1, -1), B(1, -2), C(1, 2)$  تحت تأثير تناسب معاملته 2.

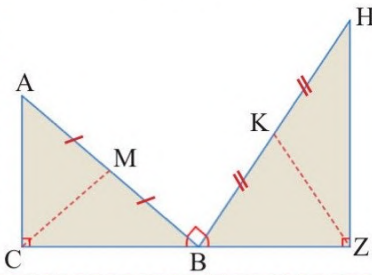
### تدرب وحل مسائل حياتية



12 **طرق:** تمثل الخريطة المجاورة بعض الشوارع المتوازية وطريقين عبرها، ما طول الطريق الاول بين الشارع 62 والشارع 52؟

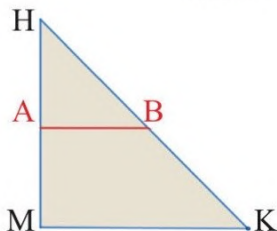
13 **هندسة:** جد صورة الشكل الرباعي حيث:  $A(2, 6), B(-4, 0), C(-4, -8), D(-2, -12)$  تحت تأثير تناسب معاملته  $\frac{1}{4}$ .

إذا علمت ان طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس القائمة الى منتصف الوتر تساوي نصف طول الوتر اجب عن السؤال 14.



14 **تحذّر:** في الرسم المجاور  $M$  منتصف  $\overline{AB}$  و  $K$  منتصف  $\overline{HB}$ ، الزوايا:  $\angle Z, \angle ABH, \angle C$  قائمة، برهن ان  $\left(\frac{KZ}{CM}\right)^2 = \frac{(BZ)^2 + (ZH)^2}{(BC)^2 + (CA)^2}$ .

ما تستطيع من تناسبات اذا علمت ان  $\overline{MK} \parallel \overline{AB}$  في الشكل المجاور.





## The Circle



## تعلم

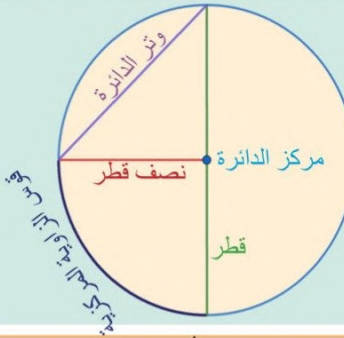
كل زاوية بين عقربي ساعة هي زاوية مركزية والزاوية المركزية هي الزاوية التي تقطع الدائرة في نقطتين ورأسها هو مركز الدائرة وكل زاوية مركزية في دائرة يقابلها قوس على الدائرة يسمى قوس الزاوية، ما قياس  $\widehat{AB}$  المقابل  $\angle AOB$ ؟ وهل هناك عدة أنواع من الأقواس؟

## فكرة الدرس

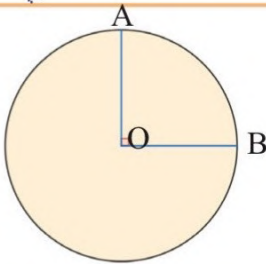
- اجد قياس الأقواس والزوايا المركزية للدوائر.
- أتعرف إلى المماس والمماس المشترك.
- المفردات
- القوس، الوتر.
- المماس، المماس المشترك.
- الزوايا المركزية.

## Arc and Chord

## [5-4-1] القوس والوتر



تعرفت سابقاً إلى مفهوم الدائرة: وهي مجموعة من النقاط المتصلة في المستوي التي لها البعد نفسه عن نقطة ثابتة تسمى مركز الدائرة، ونصف قطر الدائرة  $r$  هو قطعة مستقيمة تصل بين مركز الدائرة ونقطة على الدائرة، وتر الدائرة: هو قطعة مستقيمة طرفيها على الدائرة، قطر الدائرة: هو وتر يمر بمركز الدائرة. وسوف تزيد معلوماتك عن الدائرة في هذا الدرس لتتعرف إلى القوس وقياسه بدلالة الزاوية المركزية المقابلة له.



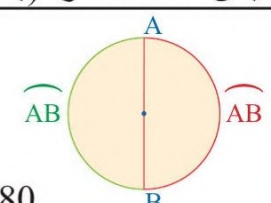
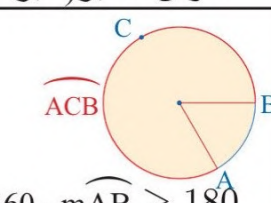
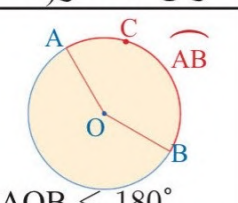
**مثال (1)** كيف اجد قياس القوس  $\widehat{AB}$  بدلالة الزاوية المركزية المقابلة له؟

قياس الزاوية المركزية يكافئ قياس القوس المقابل لها ويرمز للقوس  $\widehat{AB}$

$$m\angle AOB = 90^\circ \quad \text{الزاوية قائمة}$$

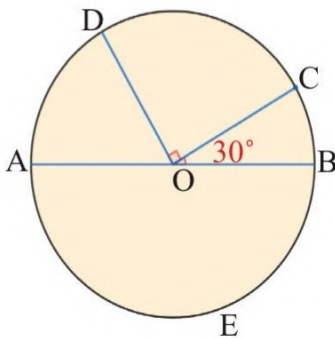
اذن قياس القوس المقابل للزاوية  $\angle AOB$  يساوي  $\widehat{AB} = 90^\circ$

هناك ثلاثة أنواع من الأقواس في الدائرة وهي:

| قياس نصف الدائرة (يساوي $180^\circ$ )                                               | القوس الأكبر (أكبر من $180^\circ$ )                                                 | القوس الأصغر (أصغر من $180^\circ$ )                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |
| $m\widehat{AB} = 180$                                                               | $m\widehat{ACB} = 360 - m\widehat{AB} > 180$                                        | $m\widehat{ACB} = m\angle AOB < 180^\circ$                                            |

جد قياس الزوايا والأقواس المجهولة في الشكل المجاور:

## مثال (2)



$$i) \widehat{BC}: m\angle BOC = 30^\circ \Rightarrow m\widehat{BC} = 30$$

$$ii) \widehat{DC}: m\angle COD = 90^\circ \Rightarrow m\widehat{DC} = 90$$

$$iii) \widehat{BCD}: m\angle BOC + m\angle COD = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$$

$$m\widehat{BCD} = 120$$

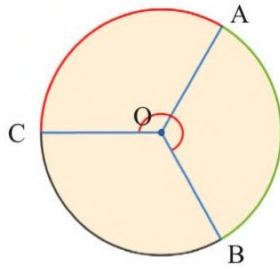
$$iv) \widehat{BEA}: m\angle BOA = 180^\circ \Rightarrow m\widehat{BEA} = 180$$

$$iv) \widehat{AD}: m\angle AOD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \Rightarrow m\widehat{AD} = 60$$



### مثال (3)

الدائرة المقابلة مقسمة على ثلاثة اجزاء متطابقة، جد قياس القواس الآتية:  $\widehat{ABC}$ ،  $\widehat{AB}$ .  
هناك ثلاث زوايا مركزية متطابقة مجموعها  $360^\circ$

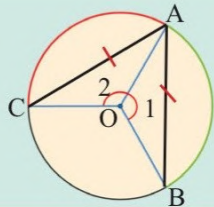


i)  $\widehat{AB}$ :  $m\angle AOB = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 120$

ii)  $\widehat{ABC}$ :  $m\angle ABC = 120^\circ + 120^\circ = 240^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 240$

او بطريقة اخرى:

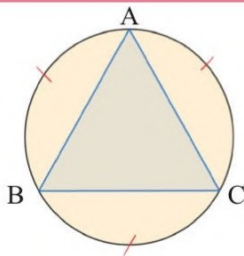
$\widehat{ABC} = 360 - 120 = 240 \Rightarrow \widehat{ABC} = 240$



لاحظ المثلثين والزوايتين المركزيتين 1,2 والقوسين  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{CA}$  والوترين  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CA}$  اذا تطابقت الزاويتان تطابق القوسان وتطابق المثلثان فيتطابق الوتران  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CA}$  ويمكنك ان تستعمل مثل هذه الطريقة للتوصل الى المبرهنة التالية (من دون برهان):

**مبرهنة القواس والاورار والزواية المركزية، في كل دائرة او في دائرتين متطابقتين**

- اذا تطابقت زاويتان مركزيتان تطابق وترها وبالعكس.  
 $\angle 1 \cong \angle 2 \Leftrightarrow \overline{AB} \cong \overline{AC}$
- اذا تطابقت زاويتان مركزيتان تطابق قوساهما وبالعكس.  
 $\angle 1 \cong \angle 2 \Leftrightarrow \widehat{AB} \cong \widehat{AC}$
- اذا تطابق قوسان تطابق وتراهما وبالعكس.  
 $\widehat{AB} \cong \widehat{AC} \Leftrightarrow \overline{AB} \cong \overline{AC}$



### مثال (4)

استعمل مبرهنة القواس والاورار لتبرهن ان المثلث ABC متساوي

الاضلاع في الدائرة المقابلة علماً ان  $\widehat{AB} \cong \widehat{AC} \cong \widehat{CB}$

$\therefore \widehat{AB} \cong \widehat{AC} \cong \widehat{CB}$

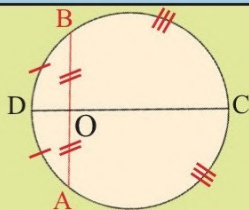
$\therefore \overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{CB}$

معطى في السؤال

مبرهنة القواس والاورار

لذا فان المثلث ABC متساوي الاضلاع.

**مبرهنة القطر العمودي، في كل دائرة**



**مبرهنة:** القطر العمودي على وتر في دائرة ينصف الوتر وينصف كلا قوسيه.

$\overline{CD} \perp \overline{AB} \Rightarrow AO = BO, \widehat{AD} \cong \widehat{DB}, \widehat{BC} \cong \widehat{AC}$

### مثال (5)

استعمل مبرهنة القطر العمودي، وجد طول الوتر AB اذا علمت ان نصف القطر OD يساوي 5cm.

وان  $DE = 2\text{cm}$

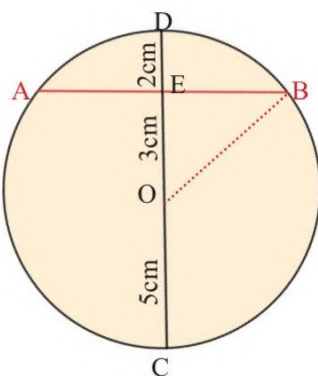
**الخطوة (1):** ارسم نصف القطر  $\overline{OC}$

معطى

**الخطوة (2):** مبرهنة فيثاغورس

بالتعويض

بالتبسيط



$OC = OD = 5\text{cm}, DE = 2\text{cm}$

$OE = 5 - 2 = 3\text{cm}$

$(EB)^2 + (EO)^2 = (OB)^2$

$25 - 9 = (EB)^2$

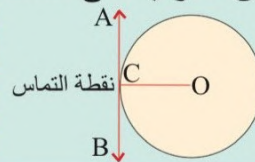
$(EB)^2 = 16 \Rightarrow EB = 4\text{cm}$

$\therefore AB = 2 \times EB = 2 \times 4 = 8\text{cm}$

E منتصف  $\overline{AB}$  مبرهنة القطر العمودي  
القطر  $\overline{DC}$  عمودي على الوتر  $\overline{AB}$  وينصفه



مماس الدائرة: هو المستقيم الذي يلاقي الدائرة في نقطة واحدة تعرف بنقطة التماس ويكون عمودياً على نصف القطر في نقطة التماس.



مبرهنة المماس

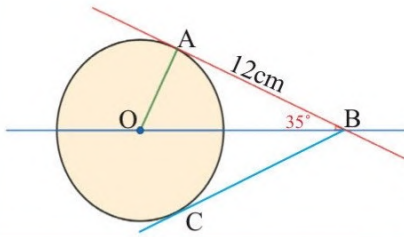
### مبرهنة المماسين

مبرهنة: القطعتان المماستان المرسومتان لدائرة من نقطة خارجة عنها متطابقتان.

$\overline{CB}$ ,  $\overline{CA}$  مماسان للدائرة من نقطة C.

$$\therefore \overline{CB} \cong \overline{CA}$$

مثال (6) دائرة مركزها O في الشكل المجاور،  $\overline{AB}$  هو مماس للدائرة في A وقياس الزاوية ABO يساوي  $35^\circ$  جد قياس الزاوية AOB، ثم جد طول القطعة المستقيمة BC.



$$\overline{AB} \perp \overline{AO}, m\angle OAB = 90^\circ$$

$$\therefore m\angle OBA = 35^\circ$$

$$\therefore m\angle AOB = 180^\circ - (90^\circ + 35^\circ) = 55^\circ$$

$$BC = 12\text{cm}$$

مماس الدائرة في النقطة A

مبرهنة المماس

معطى

مجموع زوايا المثلث  $180^\circ$  مبرهنة المماسين

في الدائرة ادناه، جد قياس الزوايا والاقواس فيما يأتي:

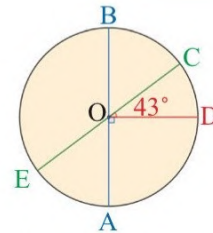
تأكّد من فهمك

1  $\angle AOD$

2  $\angle COB$

3  $\widehat{DBE}$

4  $\widehat{DAB}$



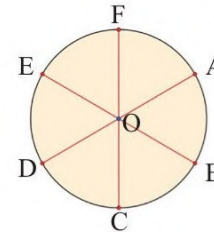
الاسئلة 1-4 مشابهة  
للمثله 1,2

دائرة مقسمة على 6 اجزاء متطابقة جد قياس كل قوس مما يأتي:

5  $\widehat{AB}$

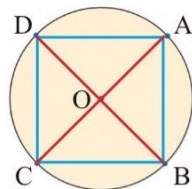
6  $\widehat{ABC}$

7  $\widehat{ABD}$

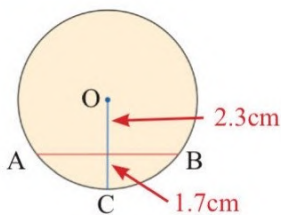


الاسئلة 5-7 مشابهة  
للمثال 3

السؤال 8 مشابه  
للمثال 4



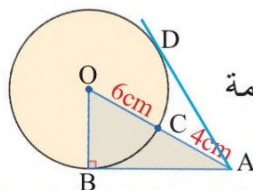
8 الدائرة المجاورة مقسمة على 4 اجزاء متطابقة، برهن ان الشكل ABCD مربع.



9 في الشكل المجاور استعمل مبرهنة القطر العمودي وجد طول القطعة المستقيمة AB في الدائرة المجاورة مقرباً الناتج الى اقرب عُشر.

السؤال 9 مشابه  
للمثال 5

السؤال 10 مشابه  
للمثال 6



10 استعمل مبرهنة المماس لتجد طول القطع المستقيمة AB, AD في الشكل المجاور.



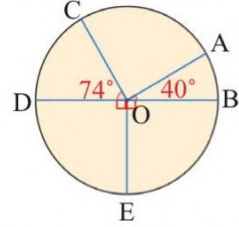
## تدرب وحل التمرينات

11  $\angle COA$

12  $\widehat{DBE}$

13  $\widehat{BAC}$

14  $\widehat{DCA}$

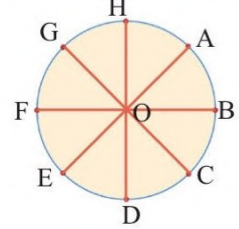


الدائرة مقسمة على 8 اجزاء متطابقة جد قياس كل قوس مما يأتي:

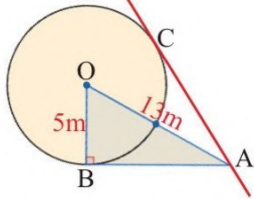
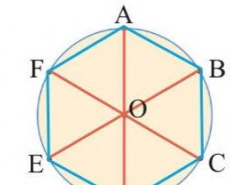
15  $\widehat{AB}$

16  $\widehat{ABC}$

17  $\widehat{GDB}$



18 الدائرة المجاورة مقسمة على 6 اجزاء متطابقة، برهن ان الشكل ABCDEF سداسي منتظم.



19 استعمل مبرهنة المماس لتجد طول القطع المستقيمة AC, AB في الدائرة المجاورة.

## تدرب وحل مسائل حياتية

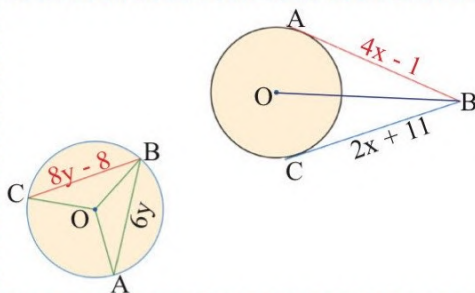


20 **جغرافية (براكين):** ترتفع فوهة بركان (هوالالاي) عن مستوى سطح البحر 2.52km، احسب المسافة بين قمة البركان ومستوى الافق اذا علمت ان نصف قطر الارض 6437km تقريباً مقرباً الناتج لاقرب كيلومتر.



21 **محطة فضائية:** تبعد محطة مير الروسية عن مستوى سطح البحر مسافة 390km تقريباً، ما المسافة بين هذه المحطة والافق، مقرباً الناتج الى اقرب كيلومتر. علماً ان نصف قطر الارض 6437km تقريباً.

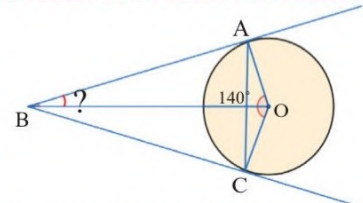
## فكر



22 **تحدي:** استعمل مبرهنة المماسين وجد طول  $\widehat{AB}$  في الدائرة المجاورة.

23 **حس عددي:** اذا كانت الزاويتان  $\angle COB, \angle AOB$  متطابقتين، جد طول  $\widehat{CB}$  في الدائرة المجاورة.

## أكتب

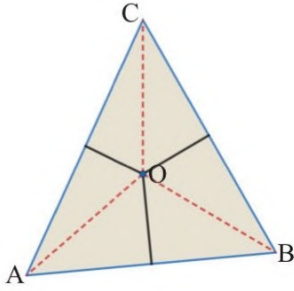


الخطوات اللازمة لتجد قياس زاوية ABC في الرسم المجاور اذا علمت ان  $\widehat{BO}$  ينصف الزاوية AOC والتي قياسها يساوي  $140^\circ$ .



Triangle and Circle and Line Segments and Circle

تعلم



في  $\triangle ABC$  المجاور يتقاطع محور  $BC$  ومحور  $AB$  في  $O$ .  
 $OB = OC$  لأن  $O$  تقع على محور  $BC$   
 $OA = OC$   
 وبالتالي  $O$  تقع على محور  $AC$  أي أن محور  $AC$  يمر في  $O$   
 $\therefore OA = OB = OC$   
 نستطيع أن نرسم دائرة مركزها  $O$  وتمر في رؤوس المثلث  $ABC$ .

فكرة الدرس

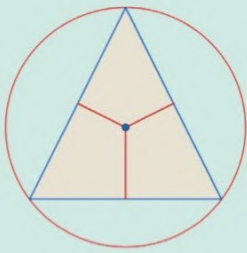
- استعمل خصائص المحاور ومنصفات الزوايا لرسم الدائرة المحيطة والدائرة المحاطة في مثلث.
- اجد أطوال القطع المستقيمة يحددها قاطعان على دائرة.

المفردات

- الدائرة المحيطة.
- الدائرة المحاطة.

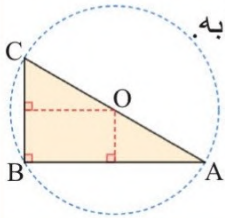
Triangle and Circle

[5-5-1] المثلث والدائرة



تعرفنا سابقاً في الدرس (2) الى مبرهنة (القطعة المستقيمة المتوسطة للمثلث):  
 [تتقاطع محاور الاضلاع الثلاثة للمثلث في نقطة واحدة]. ومنها نستطيع ان نرسم الدائرة المحيطة بالمثلث. الدائرة المحيطة (الدائرة الخارجية للمثلث): لكل مثلث دائرة واحدة تحيط به مركزها نقطة تقاطع المحاور الثلاثة.  
 المحاور: هي الاعمدة المقامة على اضلاع مثلث من منتصفاتها لتلتقي بنقطة واحدة ( $O$ ) تكون متساوية البعد عن رؤوسه وهذه النقطة هي مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث.

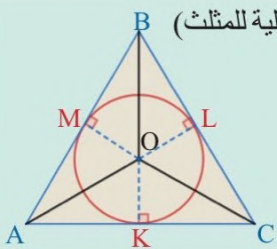
مثال (1)



جد نقطة تقاطع محاور المثلث  $ABC$  كما في الشكل المجاور وارسم الدائرة المحيطة به.

محور  $AB$  يمر في منتصف  $AB$  ويوازي  $BC$   
 محور  $BC$  يمر في منتصف  $BC$  ويوازي  $AB$

$\therefore$  المحاور الثلاثة تلتقي في منتصف  $AC$  والتي تمثل مركز الدائرة المحيطة بالمثلث.



بالامكان الاستفادة من مبرهنة منصفات زوايا المثلث لرسم الدائرة المحاطة بمثلث (الدائرة الداخلية للمثلث)

- تتقاطع منصفات زوايا المثلث في نقطة واحدة.

- نقطة تقاطع منصفات الزوايا تقع على المسافة نفسها من الاضلاع الثلاثة.

في كل مثلث توجد دائرة داخل المثلث مماسة لاضلاعه الثلاثة وتسمى الدائرة المحاطة.

$$OL = OK = OM$$

مثال (2)

الدائرة التي مركزها  $O$  محاطة بالمثلث  $ABC$  برهن ان  $BO$  منتصف

$\angle LOK$  وينصف  $KL$ .

$$BK = BL$$

$$OK = OL$$

مبرهنة المماسين

نصفا قطري الدائرة

$\therefore$  المثلثان  $BOK, BOL$  متطابقان (مبرهنة التطابق ض.ض.ض.)

$$m\angle 1 = m\angle 2$$

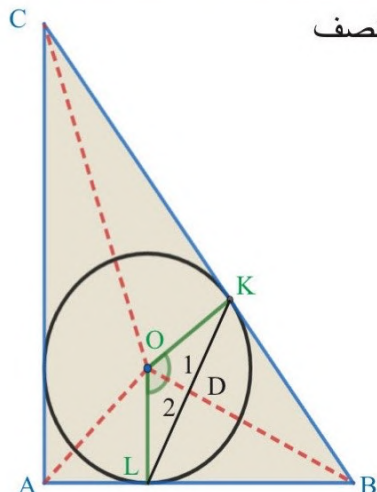
$BO$  ينصف الزاوية  $LOK$

من التطابق

المثلثان  $KDB, LDB$  متطابقان (ض.ز.ض.).

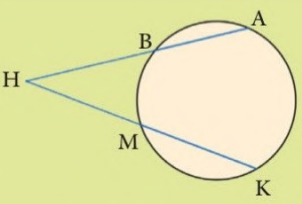
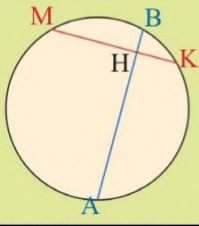
$$KL \perp BO$$

$\therefore BO$  منتصف  $KL$





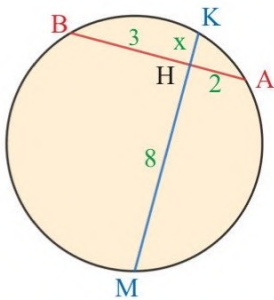
تعلمت في الدرس (5-4) كيف اجد اطوال اجزاء وتر يتقاطع مع قطر عمودي عليه، ولكن كيف اجد اطوال اوتار متقاطعة اخرى؟

| مبرهنة القاطعين للدائرة                                                                                               |                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
|                                      |  |
| $HB \times HA = HM \times HK$                                                                                         | $HM \times HK = HB \times HA$                                                     |
| <p>المبرهنة</p> <p>إذا قطع مستقيمان متقاطعان دائرة تشكل على كل منهما قطعتان مستقيمتان، ناتجا ضرب طوليها متساويان.</p> |                                                                                   |

**مثال (3)** جد قيمة  $x$  وطول كل وتر.

مبرهنة القاطعين في الدائرة

بالتعويض



$$HM \times HK = HB \times HA$$

$$8 \times x = 3 \times 2$$

$$x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$AB = AH + HB = 2 + 3 = 5$$

$$MK = MH + HK = 8 + \frac{3}{4} = 8\frac{3}{4}$$

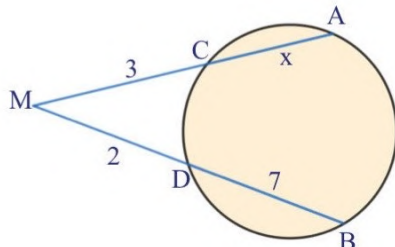
طول الوتر AB

طول الوتر MK

**مثال (4)** جد قيمة  $x$  وطول كل من  $\overline{AM}$ ,  $\overline{BM}$ .

مبرهنة القاطعين في الدائرة

بالتعويض



$$MD \times MB = MC \times MA$$

$$2 \times 9 = 3 \times (3 + x)$$

$$18 = 9 + 3x$$

$$3x = 18 - 9 = 9$$

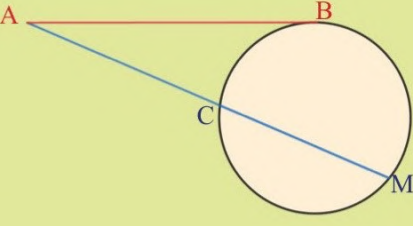
$$x = \frac{9}{3} = 3$$

$$6 = \overline{AM}$$

$$9 = \overline{BM}$$

يمكن استعمال حاصل ضرب جزئي القاطع مع مبرهنة القاطع والمماس وفي هذه الحالة يكون المماس هو الجزء الخارجي والكل للقطعة نفسها.

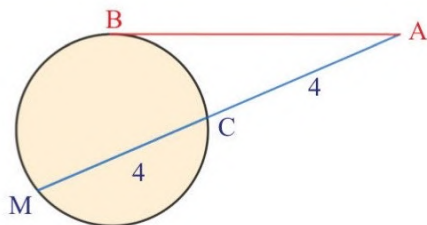
مبرهنة المماس والقاطع في الدائرة

| مبرهنة المماس والقاطع في الدائرة                                                    |                                                                                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <p>المبرهنة</p> <p>من نقطة خارج الدائرة اذا رسم مماساً ومستقيماً قاطعاً لها. فإن ناتج ضرب طولي قطعتي القاطع، يساوي مربع طول قطعة المماس.</p> $AC \times AM = (AB)^2$ |

**مثال (5)** جد طول قطعة المماس AB.

مبرهنة المماس والقاطع في الدائرة

بالتعويض



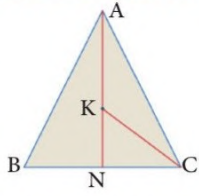
$$AC \times AM = (AB)^2$$

$$4 \times 8 = 32$$

$$\therefore AB = 4\sqrt{2}$$

طول قطعة المماس AB

## تأكّد من فهمك



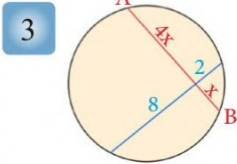
1 المثلث ABC متساوي الساقين  $AB = AC$  ،  $N$  منتصف  $BC$  ،  $\overline{KA} \cong \overline{KC}$  برهن ان  $K$  هي نقطة تقاطع محاور المثلث  $ABC$  . ثم ارسم الدائرة المحيطة به.

الاسئلة 1-2 مشابهة  
للمثال 1

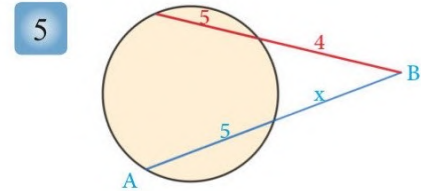
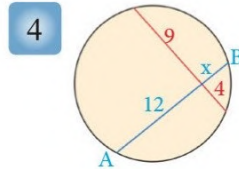
الاسئلة 3-5 مشابهة  
للمثالين 3,4

2  $ABC$  مثلث منتظم، طول ضلعه  $12\text{cm}$  حدّد نقطة تقاطع محاوره ثم ارسم الدائرة المحيطة به وجد طول قطرها.

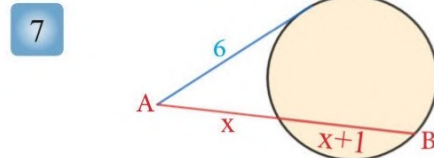
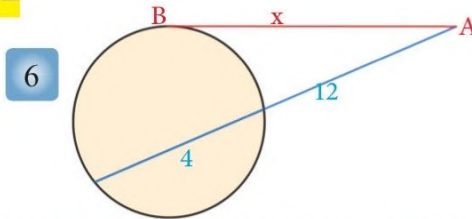
جد قيمة  $x$  وطول كل قطعة مجهولة لكل مما يأتي:



الاسئلة 6,7 مشابهة  
للمثال 5



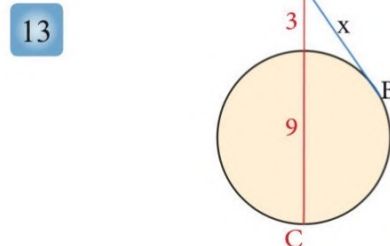
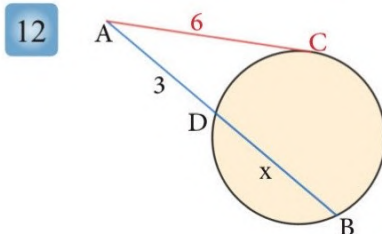
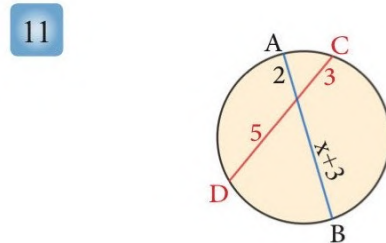
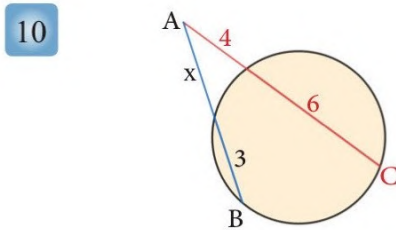
جد قيمة  $x$  وطول  $\overline{AB}$ .



## تدرب وحلّ التمرينات

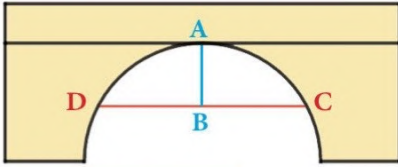
8  $ABC$  مثلث قائم متساوي الساقين وطول كل من ساقيه  $6\text{cm}$  ، ارسم الدائرة التي يحيط بها المثلث  $ABC$  وجد مساحة الدائرة.

9  $ABC$  مثلث قائم متساوي الساقين وتره  $\overline{BC}$  حدّد نقطة تقاطع محاور هذا المثلث وارسم الدائرة المحيطة به. جد قيمة  $x$  وطول القطع المستقيمة المجهولة لكل مما يأتي:

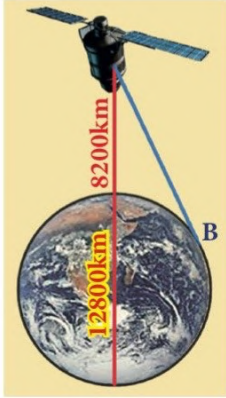




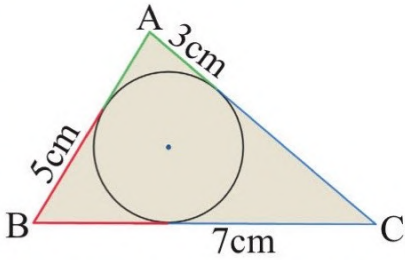
## تدرب وحل مسائل حياتية



- 14 **بناء:** يرتكز جسر على قوس دائرة كما مبين في الشكل المقابل،  
 محور  $\overline{AB}$   $DC=150m$ ,  $AB=60m$  ما قطر الدائرة؟

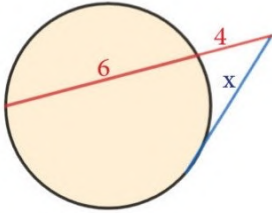


- 15 **فضاء:** قمر صناعي يدور حول الارض على ارتفاع 8200km اذا كان قطر الارض 12800km تقريباً، ما المسافة التي تفصل القمر الصناعي عن النقطة B في الشكل المجاور.



- 16 **هندسة:** في الشكل المجاور، جد محيط المثلث ABC.

## فكّر



- 17 **اكتشف الخطأ:** فيما يلي حلان لاجاد قيمة x في الشكل المقابل، ايهما الحل الخطأ؟

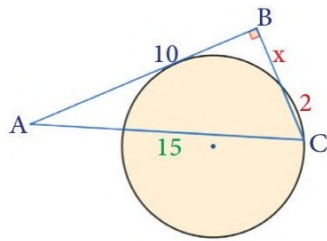
برر اجابتك.

مبرهنة المماس والقاطع

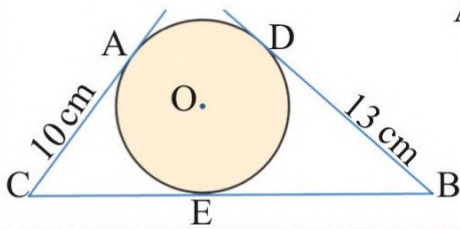
$$i) 4 \times 6 = x^2$$

$$24 = x^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{6}$$

$$ii) x^2 = 40 \Rightarrow x = 2\sqrt{10}$$



- 18 **تحديد:** في الشكل المقابل  $AB = 10$  وهو مماس للدائرة، جد قيمة x.



- 19 **مسألة مفتوحة:** في الشكل المجاور دائرة مركزها O  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{BD}$  مماسات للدائرة، جد طول القطعة BC.

## أكتب

مسألة تستعمل فيها المحاور ومنصفات الزوايا لمثلث في رسم دائرة محيطة به.

# Angles and Circle



يستعمل المفك كأداة لتثبيت البراغي او فتحها  
والفجوة في هذه الاداة تأخذ شكلاً سداسياً داخل  
اسطوانة معدنية.  
وكل زاوية في الشكل السداسي تكوّن زاوية  
محيطية داخل الدائرة.

## فكرة الدرس

- ايجاد قياس الزوايا المحيطية والمماسية.
- ايجاد قياسات زوايا تقاطع اضلاعها مع دائرة.

## المفردات

- الزاوية المحيطية.
- الزاوية المماسية.

## Inscribed Angle

## [5-6-1] الزاوية المحيطية

درست سابقاً تعريف القوس بدلالة الزاوية المركزية وكيفية قياس القوس وفي هذا الدرس سنتعرف الى:

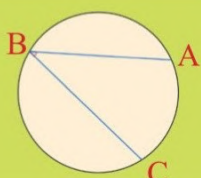
**الزاوية المحيطية:** وهي الزاوية التي رأسها نقطة من نقاط الدائرة وضلعاها وتران في الدائرة .

وكذلك سنتعرف الى كيفية قياسها باستعمال القوس المواجه لها بواسطة المبرهنات التالية وهي من دون برهان.

### مبرهنة الزوايا المحيطية

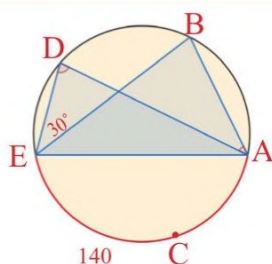
قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المواجه لها.

$$m\angle B = \frac{1}{2} m \widehat{AC}$$



### مثال (1)

جد قياس الزوايا المحيطية التالية في الشكل المجاور.



i)  $\angle D$

$$\begin{aligned} m\angle D &= \frac{1}{2} m \widehat{ECA} \\ &= \frac{140}{2} = 70^\circ \\ m\angle D &= 70^\circ \end{aligned}$$

ii)  $\angle BAD$

$$\begin{aligned} m\angle BAD &= \frac{1}{2} m \widehat{BD} \\ m\angle BED &= \frac{1}{2} m \widehat{BD} \end{aligned}$$

$$\therefore m\angle BED = m\angle BAD = 30^\circ$$

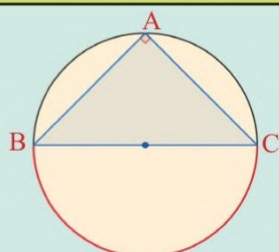
مبرهنة الزوايا المحيطية

بالتعويض

### مبرهنة الزوايا المحيطية المواجهة للقوس نفسه

كل الزوايا المحيطية التي تواجه قوساً مشتركاً على الدائرة تتطابق.

$$m\angle A \cong m\angle B \cong m\angle C \cong m\angle D = m \widehat{EF}$$

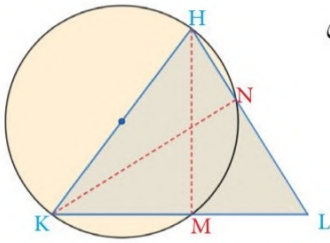


هناك حالة خاصة للزاوية المحيطية عندما تكون زاوية قائمة:

- كل زاوية محيطية تواجه نصف دائرة تكون قائمة.
- كل زاوية محيطية تواجه قطراً تكون قائمة.
- كل زاوية محيطية قائمة تواجه قطراً.

$$m\angle A = 90^\circ \Rightarrow m \widehat{BC} = 180$$





**مثال (2)** دائرة قطرها  $\overline{KH}$  تقطع  $\overline{HL}$  في  $N$  وتقطع  $\overline{KL}$  في  $M$ ، كما في الشكل

المجاور، برهن ان  $\overline{KN}$  و  $\overline{HM}$  ارتفاعات في المثلث HKL.

 $\therefore m \angle HNK$ 

زاوية محيطية تواجه القطر  $\overline{KH}$

$$\therefore m\angle HNK = 90^\circ$$

## قائمة

$\overline{KN}$  ارتفاع في المثلث HKL

$$\therefore m \angle \text{HMK}$$

KH زاوية محيطية تواجه القطر

$$\therefore m\angle HMK = 90^\circ$$

## قائمة

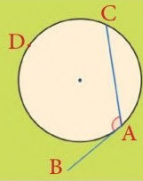
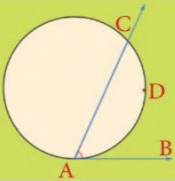
### HM ارتفاع في المثلث HKL

## Tangential Angle

### [5-6-2] الزاوية المماسية

الزاوية المماسية: هي الزاوية التي يشكلها مماس الدائرة مع مستقيم اخر يمر في نقطة التماس (وتر للدائرة).

## مبرهنة الزوايا المماسية

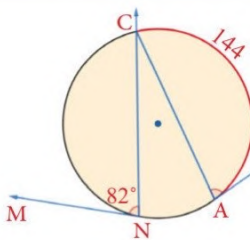


إذا تقاطع مماس الدائرة مع مستقيم يمر في نقطة التماس يكون قياس الزاوية بينهما نصف قياس القوس المقطوع.

$$m\angle A = \frac{1}{2}m \widehat{ADC}$$

### مثال (3)

**باستعمال مبرهنة الزوايا المماسية والشكل المجاور جد قياس كل مما يأتي:**



i)  $\angle BAC$

$$\begin{aligned} m\angle BAC &= \frac{1}{2}m\widehat{CA} \\ &= \frac{144}{2} = 72^\circ \\ \therefore m\angle BAC &= 72^\circ \end{aligned}$$

ii)  $\widehat{\text{NC}}$ 

مبرهنة الزوايا المماسية

$$m\angle CNM = \frac{1}{2} m \widehat{CN}$$
$$82^\circ = \frac{1}{2} m \widehat{CN}$$

بالتعويض

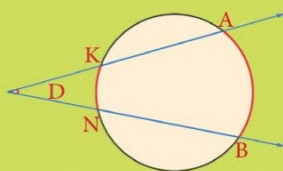
$$\therefore m \widehat{CN} = 164$$

## بالتعويض

## Internal and External Angels in the Circle

### [5-6-3] الزوايا الداخلية والخارجية في الدائرة

مبرهنة الزاوية الخارجية في دائرة



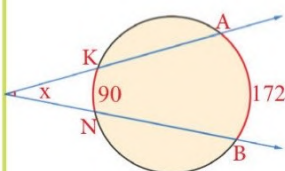
إذا تقاطع مستقيمان خارج دائرة فقياس الزاوية بينهما يساوي نصف الفرق بين قياس القوسين المقطوعين.

$$m\angle D = \frac{1}{2}(m \widehat{AB} - m \widehat{KN})$$

#### مثال (4)

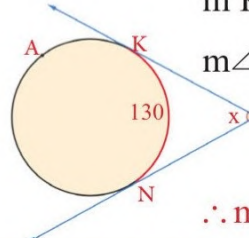
**جد قياس الزاوية الخارجية  $x$  في كل مما يأتي:**

i) باستعمال مبرهنة الزاوية الخارجية في الدائرة وبالتعويض عن قيمة الاقواس في الرسم نجد قياس زاوية  $x$ .



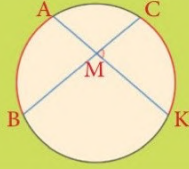
$$\begin{aligned} m\angle x &= \frac{1}{2}(m\widehat{AB} - m\widehat{KN}) \\ &= \frac{1}{2}(172 - 90) \\ \therefore m\angle x &= \frac{82^\circ}{2} = 41^\circ \end{aligned}$$

ii) باستعمال مبرهنة الزاوية الخارجية في الدائرة وبالتعويض  
عن قيمة  $\widehat{KAK}$  بـ  $360^\circ$  نجد قياس زاوية  $\widehat{x}$ .



$$\begin{aligned} m \widehat{KAN} &= 360 - 130 = 230 \\ m \angle x &= \frac{1}{2}(m \widehat{KAN} - m \widehat{KN}) \\ &= \frac{1}{2}(230 - 130) \\ \therefore m \angle x &= \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ \end{aligned}$$

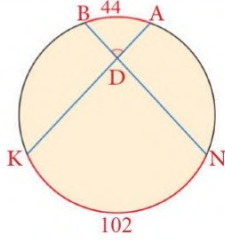
### مبرهنة الزاوية الداخلية في دائرة



إذا تقاطع مستقيمان داخل دائرة فقياس الزاوية بينهما يساوي نصف مجموع قياس القوسين المقطوعين.

$$m\angle CMK = \frac{1}{2}(m\widehat{CK} + m\widehat{AB})$$

$$m\angle CMA = \frac{1}{2}(m\widehat{AC} + m\widehat{BK})$$



**مثال (5)** جد قياس  $\angle ADB$  مستعملاً مبرهنة الزاوية الداخلية في الدائرة.

$$m\angle ADB = \frac{1}{2}(m\widehat{KN} + m\widehat{AB})$$

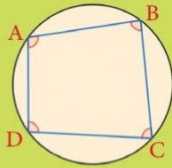
$$= \frac{1}{2}(102 + 44)$$

$$\therefore m\angle ADB = \frac{146^\circ}{2} = 73^\circ$$

بالتعويض

يمكن إيجاد دائرة تمر في الرؤوس الأربعة لرباعي ويسمى هذا الرباعي بالرباعي الدائري.

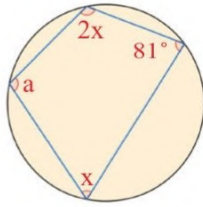
### مبرهنة الرباعي الدائري



في كل رباعي دائري مجموع قياس كل زاويتين متقابلتين يساوي  $180^\circ$

$$m\angle A + m\angle C = 180^\circ$$

$$m\angle B + m\angle D = 180^\circ$$



$$\therefore a + 81^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore a = 180^\circ - 81^\circ = 99^\circ$$

$$\therefore x + 2x = 180^\circ \Rightarrow 3x = 180^\circ$$

$$\therefore x = 60^\circ$$

**مثال (6)** جد قيمة  $x$ ,  $a$  في الشكل المجاور:

مبرهنة الرباعي الدائري

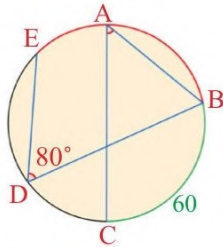
مبرهنة الرباعي الدائري

جد قياس كل مما يأتي:

تأكد من فهمك

1  $m\widehat{BE}$

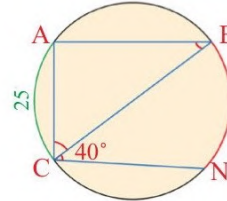
3  $m\angle CAB$



2  $m\angle ABC$

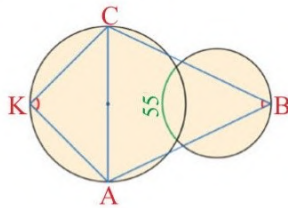
4  $m\angle ACB$

5  $m\widehat{BN}$



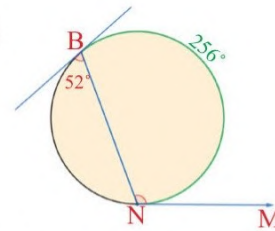
6  $m\angle CKA$

8  $m\angle CBA$



7  $m\angle MNB$

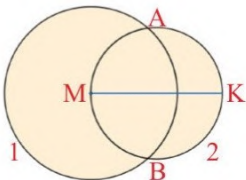
9  $m\widehat{BN}$



الاسئلة 1-5 مشابهة  
للمثال 1

الاسئلة 6,7,10  
مشابهة للمثال 2

الاسئلة 8,9 مشابهة  
للمثال 3

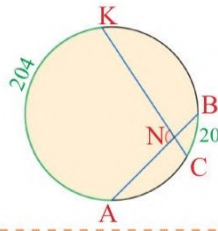


10 إذا علمت أن M مركز الدائرة 1 و MK هو قطر الدائرة 2، برهن أن  $\overline{KA}$  و  $\overline{KB}$  مماسان للدائرة 1.

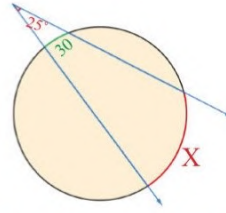


جد قياس كل مما يأتي:

11  $m\angle KNA$



12  $m\widehat{X}$



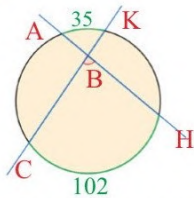
الاسئلة 11, 12

مشابهة للامثلة 4, 5, 6  
على الترتيب

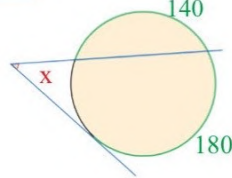
جد قياس كل مما يأتي:

تدرب وحل التمرينات

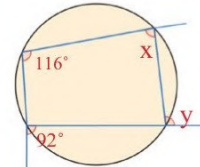
13  $m\angle HBC$



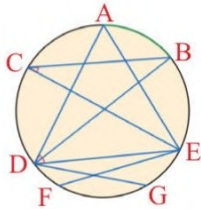
14  $m\angle x$



15  $m\angle x, m\angle y$

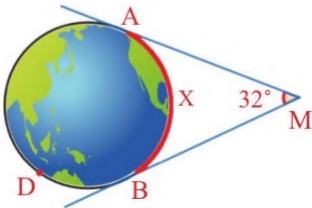


تدرب وحل مسائل حياتية



16 **زجاج:** رسم احد الفنانين الرسم المجاور على زجاج، جد قياس  $\angle ADE$  اذا علمت

ان  $\angle BCE = 30^\circ$  وقياس  $\widehat{AB} = 42$ .



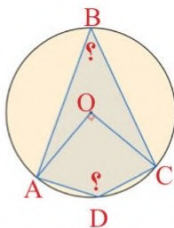
17 **فضاء:** قمر صناعي يدور حول الارض عندما يصل النقطة M يكون على ارتفاع

14000km فوق الارض، ما قياس القوس الذي يمكن رؤيته من كاميرا القمر

الصناعي على الارض؟

فكر

19 **حس عددي:** جد قيمة الزوايا المجهولة:

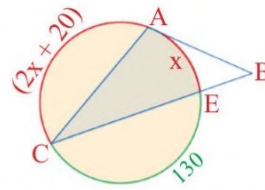


18 **اكتشف الخطأ:** كتب سعيد

$m\angle CAB$

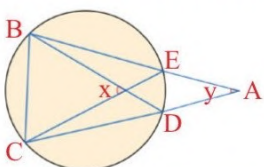
$\frac{160^\circ}{2} = 80^\circ$

بين الخطأ وجد الجواب الصحيح



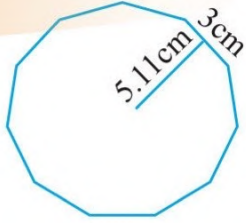
اكتب

مبرهنات الزوايا الداخلية والخارجية لتقارن بين الزاويتين x, y.



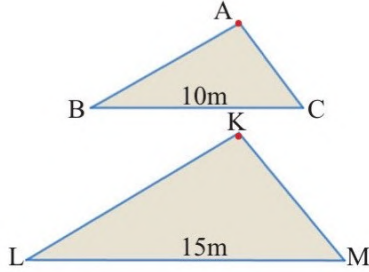
# Chapter Test

# اختبار الفصل

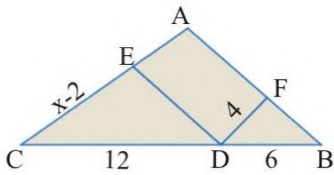


1 جد مساحة ومحيط مضلع منتظم اذا اعطيت المعلومات في الشكل المجاور.

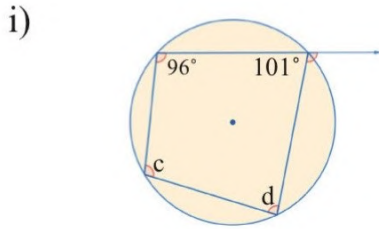
2 جد المساحة الجانبية والحجم للمخروط اذا علمت ان مساحة قاعدته  $9\pi \text{ cm}^2$  وارتفاعه الجانبي 5cm.



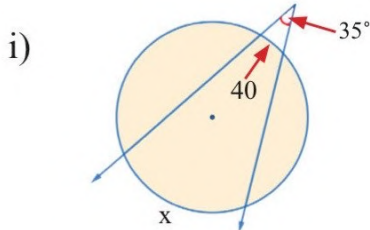
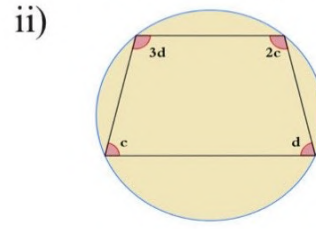
3 المثلثان ABC, KLM متشابهان، مساحة المثلث ABC تساوي  $24\text{m}^2$  ما مساحة المثلث KLM؟



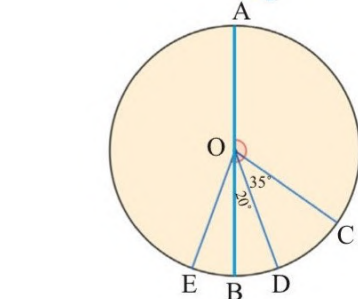
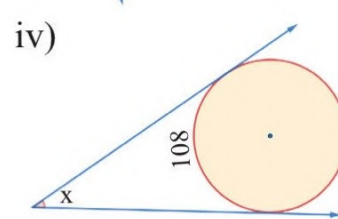
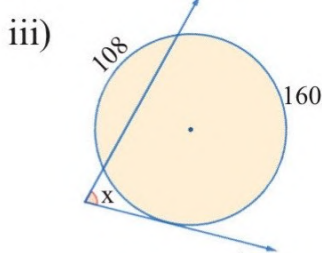
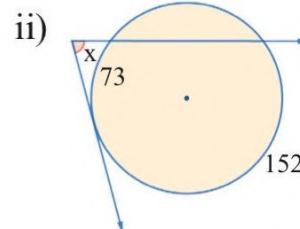
4 بين ان المثلثين ABC, FBD في الشكل المجاور متشابهان، حيث ان:  $\overline{AC} \parallel \overline{FD}$ ، وجد قيمة x.



5 جد قياس الزوايا المجهولة في الاشكال الآتية:



6 جد قيمة x في كل مما يأتي:



7 جد قياس الزوايا والاقواس المجهولة في الشكل المجاور.

- i)  $m\angle AOC$  ii)  $m\widehat{DC}$   
iii)  $m\widehat{DB}$  iv)  $m\angle DOA$



## الاحصاء والاحتمالات

## Statistics and Probabilities

- الدرس 6-1 تصميم دراسة مسحية وتحليل نتائجها
- الدرس 6-2 البيانات والاحصاءات المضللة
- الدرس 6-3 الاحتمال التجريبي والاحتمال النظري
- الدرس 6-4 الاحداث المركبة

تتحقق مصانع السيارات عادة قبل طرح انتاجها في الاسواق من عدة أمور لضمان الجودة، منها متانة محرك السيارة، جودة كهربائيات السيارة، الالوان والامور التصميمية كمصابيح السيارة وغير ذلك.

# الاختبار القبلي

جد الوسط الحسابي و الوسيط و المنوال والمدى لكل مما يأتي :

1 9,6,8,5,5,8,7,6,9,7

2 20,17,42,26,27,12,13

3 8,7,5,8,2,8,9,1,4,3,3,5

4 مثل البيانات التالية بالنقاط ثم جد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال والمدى:

0,2,5,3,1,4,5,3,4,3

اكتب كل كسر كنسبة مئوية:

5  $\frac{1}{4}$

6  $\frac{13}{20}$

7  $\frac{27}{100}$

8  $\frac{3}{25}$

9 صندوق فيه 5 كرات حمراء، 3 كرات بيضاء، جد احتمال سحب.

(i) كرة حمراء واحدة.

(ii) كرة بيضاء بعد اعادة الكرة الحمراء الى الصندوق.

(iii) كرة بيضاء في حالة عدم اعادة الكرة الحمراء الى الصندوق.

10 a, b حدثان متتامان، جد:

(i)  $P(a)$  اذا كان  $P(b) = \frac{2}{7}$

(ii)  $P(a), P(b)$  اذا كان  $P(a)$  ثلاثة امثال  $P(b)$ .

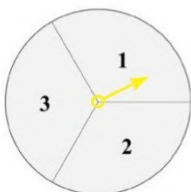
حدد ان كان الحدثان مستقلين او مترابطين .

11 ظهور كتابة بعد رمي قطعة نقود و ظهور الصورة بعد الرمية الثانية.

12 سحب كرة صفراء، ثم كرة الحمراء من دون اعادة، من كيس فيه 3 كرات صفراء، 5 كرات حمراء.

13 ظهور العدد 5 بعد رمي حجر النرد وظهور العدد 6 بعد رمية النرد الثانية.

14 سحب بطاقة عليها اسم جمانة من كيس من دون اعادتها، ثم سحب بطاقة عليها اسم سالي من الكيس نفسه.



15 وقوف مؤشر القرص على العدد 3، وظهور العدد 3 عند رمي حجر النرد مرة واحدة.

16 ثلاث بطاقات تحمل الاحرف A B C بكم طريقة يمكن ترتيب البطاقات على خط مستقيم.



## تعلم



يعدّ معمل النجف لصناعة البدلات الرجالية من الصروح المهمة في الصناعة الوطنية حيث يحرص المعنيون على تحقيق امور لضمان جودة المنتج. وذلك من خلال فحص نوع القماش، والالوان والتصاميم الحديثة و غيرها. ان فحص كل المنتج ستكون عملية غير منطقية لذا يفحص عدد محدود من تلك البدلات بدلاً من ذلك. ليستنتج ان المنتج قد يحتاج الى تطوير.

## فكرة الدرس

- تصميم دراسة مسحية
- تحليل النتائج

## المفردات

- دراسة مسحية
- المجتمع
- العينة

## Design a Survey Study

## [6-1-1] تصميم دراسة مسحية

العينة: هي مجموعة جزئية من المجتمع . ومن خلال تحليل نتائج العينة يمكن التوصل الى استنتاجات حول المجتمع كاملاً . تكون الاستنتاجات اكثر تمثيلاً للمجتمع في اي من الحالتين:

- حجم العينة اكبر.
- استعمال عينات اكثر.

ولنوع العينة تاثير في الاستنتاجات التي يتوصل اليها وهي على نوعين:

- العينة المتحيزة: اذا كان لكل فرد منها الاحتمال نفسه في الاختيار.
- العينة غير المتحيزة: اذا كان لافرادها احتمالات مختلفة في الاختيار.

**مثال (1)** وزع مدير مدرسة 100 ورقة استبانة على طلاب مدرسته للتعرف الى جودة المواد الغذائية في حانوت المدرسة.

(i) حدّد العينة والمجتمع الذي اختير منه.

(ii) صف اسلوب جمع البيانات الذي استعمله المدير.

(iii) حدّد ما اذا كانت العينة متحيزة ام غير متحيزة.

(i) العينة: الطلاب الذين تسلموا الاستبيانات وعددهم 100 طالب

المجتمع : جميع طلاب المدرسة

(ii) اسلوب جمع البيانات هو دراسة مسحية، اذ تؤخذ البيانات من اجابات افراد العينة نحو الاستبانة

(iii) العينة غير متحيزة: لان هذه العينة تتكون من طلاب اختيروا عشوائياً

**مثال (2)** يريد صاحب متجر ان يقدم هدية لكل زبون يتسوق من متجره. فوقف عند باب المتجر وسأل 20 متسوقاً عن نوع الهدية التي يود ان تُقدم له.

- (i) حدّد العينة و المجتمع الذي اختاره صاحب المتجر .
  - (ii) صف اسلوب جمع البيانات الذي استعمله صاحب المتجر.
  - (iii) حدّد ما اذا كانت العينة متحيزة ام غير متحيزة.
- (i) العينة: المتسوقون الذين سألوا وعددهم 20 متسوقاً.  
المجتمع: المتسوقون الذين دخلوا المتجر.
- (ii) اسلوب جمع البيانات هو دراسة مسحية، اذ تؤخذ الاجابات من افراد العينة المختارة .
- (iii) العينة غير متحيزة، لان الاشخاص الذين دخلوا المتجر اختيروا عشوائياً.

**مثال (3)** سئل 10 اشخاص دخلوا مطعم كباب عن الاكلات التي يفضلونها.

- (i) حدّد العينة والمجتمع الذي اختاره صاحب المطعم.
  - (ii) صف اسلوب جمع البيانات الذي استعمله صاحب المطعم.
  - (iii) حدّد اذا كانت العينة متحيزة ام غير متحيزة.
- (i) العينة : الاشخاص العشرة الذين دخلوا المطعم.  
المجتمع: جميع الاشخاص الذين دخلوا المطعم.
- (ii) اسلوب جمع البيانات هو دراسة مسحية اذ تؤخذ الاجابات من افراد العينة المختارة.
- (iii) العينة متحيزة، لان الاكلة المفضلة للاشخاص الموجودين في مطعم الكباب هي الكباب.

## Analysis of the Results

## [2-1-6] تحليل النتائج

بعد جمع البيانات من خلال الدراسة المسحية تلخص البيانات كي تكون ذات معنى وذلك عن طريق استعمال مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال) والتي دُرست سابقاً، بطرائق مختلفة واختيار المقياس الأنسب لتمثيل البيانات.

| النوع         | متى يفضل استعماله                                                                   |
|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| الوسط الحسابي | عندما لا توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات.                                        |
| الوسيط        | عندما توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات، ولكن لا توجد فجوات كبيرة في وسط البيانات. |
| المنوال       | عندما يوجد اعداد متكررة في مجموعة البيانات.                                         |



#### مثال (4)

اي مقاييس النزعة المركزية (ان وجدت) هو الأنسب لوصف البيانات في كل مما يأتي:

- i) البيانات المجاورة تبين اوزان 10 صناديق بالكيلو غرام : 3, 2, 3, 6, 5, 5, 21, 4, 3, 5  
الوسط الحسابي: غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة كبيرة متطرفة هي: 21 تؤثر في قيمة الوسط الحسابي.  
المنوال: غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود اكثر من منوال هما : 3, 5  
الوسيط: هو المقياس الأنسب لتمثيل هذه البيانات لعدم وجود فجوة كبيرة في وسط البيانات 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 21  
ii) حصل محمد على الدرجات التالية في خمسة اختيارات في مادة الرياضيات : 90, 93, 85, 86, 91  
الوسط الحسابي 
$$\frac{90+93+85+86+91}{5} = \frac{445}{5} = 89$$
  
الوسط الحسابي: 89 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لعدم وجود قيمة متطرفة.  
الوسيط: 90 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لانه يتوسط البيانات ولا يوجد فجوة كبيرة في وسط البيانات  
لذا كلاهما مقياس مناسب لتمثيل البيانات. المنوال: لا يوجد لعدم وجود تكرار في البيانات.

#### تأكّد من فهمك

حدّد العينة و المجتمع ثم صف اسلوب جمع البيانات وميّز العينة المتحيزة عن

العينة غير متحيزة في كل مما يلي، فسّر اجابتك:

- 1 دخل 30 شخص مكتبة عامة وسئل كل سادس شخص يدخل المكتبة عن هوايته المفضلة.
- 2 وزعت 100 استبانة على مجموعة من عمال احد المصانع تتضمن سؤالاً حول ظروف العمل في المعمل.
- 3 وزعت الحيوانات في احدى حدائق الحيوانات، ثم اختير حيوان من كل مجموعة بصورة عشوائية لاجراء فحوصات عليّة.

اي مقاييس النزعة المركزية (ان وجدت) هو الأنسب لوصف البيانات التالية ؟ فسّر اجابتك .

- 4 8 , 10 , 14 , 8 , 13 , 6
- 5 8 , 10 , 8 , 9 , 11 , 4 , 6 , 54
- 6 8 , 9 , 8 , 6 , 10 , 9 , 11 , 13 , 14 , 8 , 6 , 7 , 19

#### تدربْ وحلّ التمرينات

حدّد العينة والمجتمع ثم صف اسلوب جمع البيانات وميّز العينة المتحيزة من

العينة غير متحيزة في كل مما يلي، فسّر اجابتك.

- 7 يريد صاحب معمل التحقق من ان العمال يعملون بشكل جيد، فراقب احد العمال مدة ساعتين.
- 8 يقف عدد من الطالبات عند مدخل المدرسة ويسألن كل عاشر طالبة تدخل المدرسة عن هوايتها المفضلة.

اي مقياس النزعة المركزية (ان وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات التالية ؟ فسّر اجابتك.

- 9 34, 47, 41, 49, 39, 26, 40
- 10 6, 2, 4, 4, 3, 2, 6, 2, 4, 4, 20
- 11 5, 3, 5, 8, 5, 3, 6, 7, 4, 5

## تدرب وحل مسائل حياتية



**مستشفى:** يعد مستشفى مدينة الطب مجمعاً طبياً متكاملاً، يقدم خدمات للمواطنين في بغداد والمحافظات، في ندوة تعريفية يتم اختيار طبيب من كل قسم عشوائياً ليقدم نبذة عن خدمات قسمه في المستشفى.

12 صف العينة و المجتمع.

13 هل العينة متحيزة ام لا ؟ فسّر ذلك.

14 **تسويق:** يبيّن الجدول ادناه عدد الزبائن الذين يرتادون محل لبيع الاجهزة الكهربائية في كل ساعة في احد الايام.



| عدد الزبائن |    |    |    |
|-------------|----|----|----|
| 79          | 71 | 86 | 86 |
| 88          | 32 | 79 | 86 |
| 71          | 69 | 82 | 70 |
| 85          | 81 | 86 | 86 |

15 **تغذية:** يبيّن الجدول ادناه السرعات الحرارية لبعض الخضروات في طبق لكل نوع، اي مقاييس النزعة المركزية هو الأنسب لوصف البيانات.



| الخضروات | السرعات | الخضروات | السرعات |
|----------|---------|----------|---------|
| بصل      | 16      | خيار     | 13      |
| فلفل     | 20      | زهر      | 66      |
| ملفوف    | 17      | سبانخ    | 9       |
| جزر      | 28      | كوسا     | 17      |

## فكر

16 **تحذّر:** اوجد مجموعة من الاعداد يكون وسيطها اصغر من وسطها الحسابي.

17 **أصحّ الخطأ:** تقول سناريا ان الوسط الحسابي هو انسب مقاييس النزعة المركزية لتمثيل البيانات 20,8,4,5,3 حدد خطأ سناريا وصححه .

18 **حس عددي:** في دراسة مسحية حول الدوام في مدرسة ثانوية، وزعت استبانة على 50 طالباً، فكانت نسبة 74% من الطلاب يفضلون الدوام الصباحي. هل هذه الدراسة موثوق بها؟ بيّن ذلك.

## أكتب

سؤالاً عن معنى تريد اجابته من خلال دراسة مسحية.





## تعلم

غالباً ما نلاحظ على واجهات المحال التجارية اعلانات تنزيلات نهاية الموسم لسلع معينة تُرغب الناظر من دخول المحل والتبضع منه.

## فكرة الدرس

- تمييز البيانات المضلّة
- تمييز الإحصاءات المضلّة

## المفردات

- البيانات المضلّة
- الإحصاءات المضلّة

## Discrimination Misleading Data

## [6-2-1] تمييز البيانات المضلّة

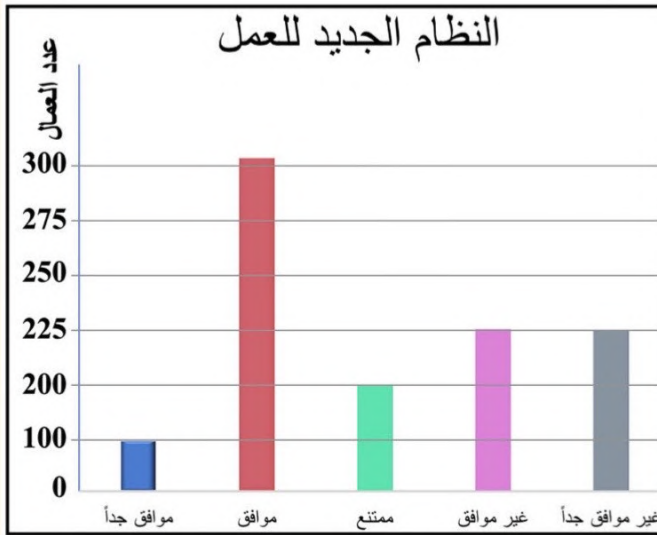
البيانات المضلّة: هي البيانات التي تبرز صفة معينة لسلعة على نحو مبالغ فيه وعرض الحقائق بشكل يولد لدى الناظر انطباعاً يروق لصاحب الاعلان وتضلل المستهلك.

## مثال (1)

يفكر صاحب مصنع تطبيق نظام جديد

في العمل، فوزع استبانة على العمال يسألهم عن رأيهم في النظام الجديد.

هل التمثيل بالاعمدة المجاور يعطي الصورة الصحيحة حول نتائج الاستبانة؟



يبدو للوهلة الاولى ان معظم العمال موافقون على تطبيق النظام الجديد، مع العلم ان اطوال المدة الزمنية للتدريج غير ثابتة.

لاحظ ان: 450 عامل غير موافقين او غير موافقين جداً على هذا النظام الجديد، في حين ان عدد الموافقين يزيد قليلاً على 300 عامل فقط، وعليه فإن التمثيل البياني المعروض مضلل، والاستنتاج غير صادق. ملاحظة: (الرسم البياني قد يكون مضللاً، بإطالة او تقصير الفترات بين قيم البيانات، وذلك لاعطاء انطباع معين).

## مثال (2)

الرسم البياني المجاور يوضح العلاقة بين طولي القرش البيضاء الكبيرة وطول سمكة القرش مأكو.

بيّن هل الرسم البياني مضلل؟ وضح ذلك.



من الشكل المجاور، نلاحظ ان طول العمود العلوي ضعف طول العمود السفلي.

ولكن القيمة المناظرة لطول العمود العلوي هي 4.9 والقيمة المناظرة لطول العمود السفلي هي 4 وبالتأكيد قيمة 4.9 ليست ضعف 4، وعليه الرسم البياني المجاور مضلل.

ملاحظة: (عندما يبدأ الرسم البياني من الصفر، يصبح الرسم غير مضلل).

## [6-2-2] تمييز الإحصاءات المضلّة

### Discrimination Misleading Statistics

الإحصاءات المضلّة: بالإضافة الى الرسوم المضلّة تستعمل الإحصاءات المضلّة بهدف الترويج لشركة او بضاعة معينة، بانعام النظر جيداً في معطيات الاعلان يمكن تمييز الإحصاءات المضلّة.

## مثال (3)

وضع صاحب محل للملابس الرجالية الاعلان الآتي:

(بدلات رجالية جديدة متوسط السعر 45 الف دينار)

في المحل 5 نماذج من البدلات اسعارها بالالاف:

54, 50, 20, 48, 53

$$\frac{54 + 50 + 20 + 48 + 53}{5} = 45$$

لاحظ ان متوسط اسعار البدلات الخمس 45 الف دينار، الا ان بدلة واحدة فقط سعرها 20 الف دينار. حيث يقل سعرها عن هذا المتوسط. وهذا يجعل الزبون يدفع اكثر من هذا السعر ثمناً للبدلة.

## مثال (4)

في استطلاع على 800 طالب اعدادية، افاد 70 منهم انهم

يرغبون دخول كلية الهندسة فيما قال 50 منهم، بانهم يرغبون في دخول كلية الطب، جاء في نتائج الاستطلاع ان الطلاب يفضلون الهندسة على الطب.

ان مجموع الطلاب الذين شملهم الاستطلاع فعلاً هو  $120 = (50 + 70)$  طالباً

من اصل 800 طالب، اي ان العينة العشوائية كانت صغيرة جداً

$$\frac{120}{800} \times 100$$

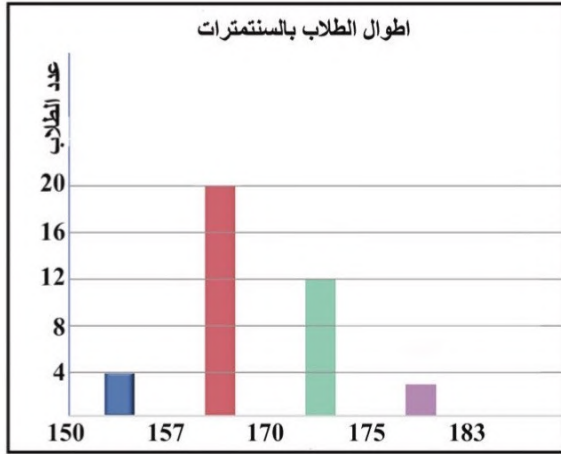
وتساوي 15%.



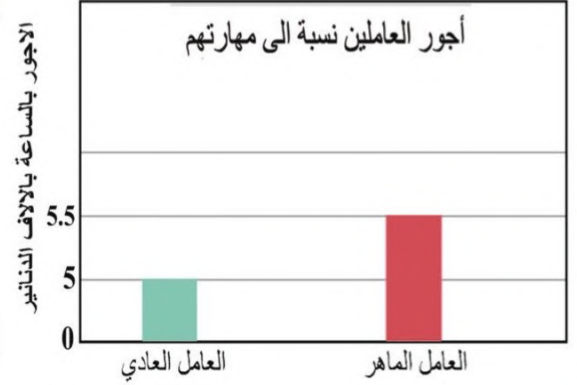
## تأكّد من فهمك

وضح كيف يمكن ان يُؤد كل من الرسمين البيانيين التاليين انطباعاً مضللاً :

1



2



فسّر لماذا الإحصاءات التالية مضلّة:

3

عُرض مقال على 20 شخصاً لتقويمه، أبدى 13 منهم اعجابهم بالمقال، بناءً على ذلك صرح صاحب المقال: بأن المقال صالح للنشر لأن نسبة الذين فضلوه كانت 13 الى 7.

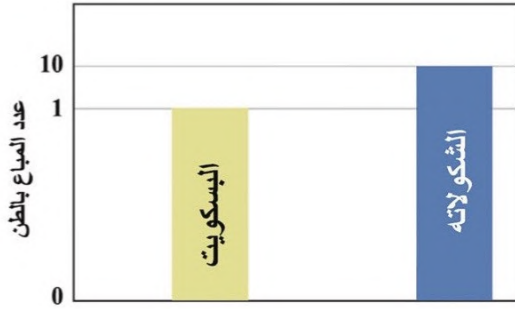
4

باع مخزن ملابس رياضية لمدة زمنية معينة 320 بدلة رياضية، في حين باع مخزن لبيع الالعاب والملابس الرياضية ولمدة نفسها 90 بدلة رياضية.

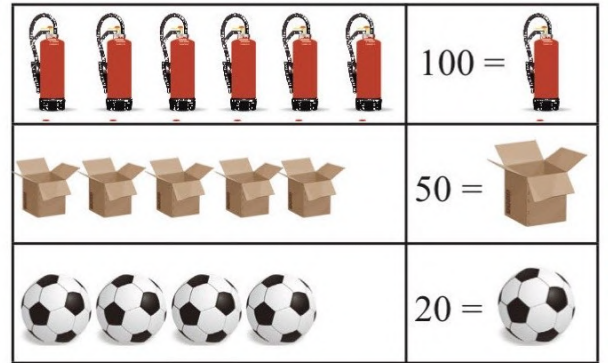
وضح كيف يمكن ان يولد كل من الرسمين البيانيين التاليين انطباعاً مضللاً.

تدرب وحلّ التمرينات

5



6



7

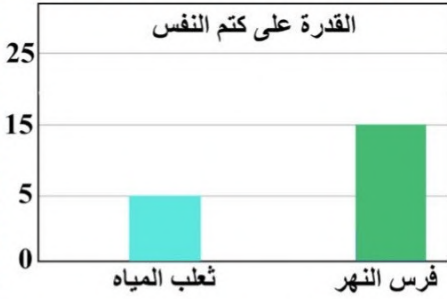
في استطلاع شمل 6 اشخاص حول مطالعة جريدة يومية، افاد 4 منهم انهم يفضلون الجريدة ( X ) في نهاية الاستطلاع وردت الجملة الآتية:

يفضل 2 من كل 3 اشخاص مطالعة الجريدة ( X ) لماذا يُعد هذا الاعلان مضللاً؟

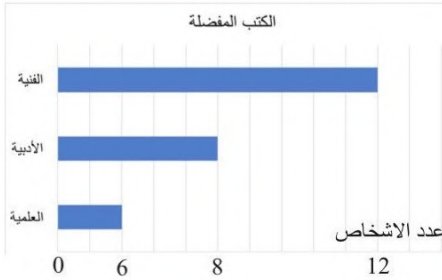
8

سئل 100 طالب عن الطريقة التي يفضلونها في القدوم الى المدرسة، فكانت إجابات 60 طالباً منهم على النحو الآتي: 32 منهم يفضلون القدوم بواسطة سيارة الاجرة و 18 يفضلون المشي و 10 طلاب يفضلون القدوم بسياراتهم الخاصة. أستنتج ان نصف الطلاب يفضلون سيارة الاجرة. فسّر لماذا الإحصاءات مضلّة؟

## تدرب وحل مسائل حياتية



9 **الاحياء :** الرسم البياني المجاور يمثل القدرة على كتم النفس لفرس النهر وتغلب المياه.  
لماذا البيانات في الرسم مضللة؟ وضح ذلك.



10 **مطالعة :** الرسم المجاور يمثل اشخاص يفضلون مطالعة الكتب الادبية، العلمية، الفنية.  
فسر لماذا البيانات في الرسم مضللة؟



11 **مواصلات :** بلغت ارباح شركة الطيران A في شهري تموز وآب 5500 مليون دينار، في حين كانت ارباح شركة الطيران B في شهري نيسان ومايس 7500 مليون دينار.  
فسر لماذا الإحصاءات مضللة؟



12 **تغذية :** تحتوي قسبة البروكلي على 477mg من البوتاسيوم والجزرة الكبيرة 230mg من البوتاسيوم في حين يحتوي رأس القرنبيط على 803mg من البوتاسيوم. فسر لماذا الإحصاءات هذه مضللة؟

## فكر

13 **اكتشف الخطأ:** يقول محمد ان الرسم يكون غير مضلل اذا بدأ رسم الاعمدة من الصفر بصرف النظر عن ثبوت طول الفترات. اكتشف خطأ محمد.

14 **حس عددي:** حصل احد الباعة على العمولات التالية بالالاف الدنانير: شباط 965، اذار 170، نيسان 120، تموز 125، مايس 100.

اخبر اصدقائه ان متوسط عمولته الشهرية 265 الف دينار. فسر لماذا هذا الاحصاء مضلل؟

15 ما الذي يجب ان تتأكد منه لتقرر ما اذا كان الرسم البياني مضللاً ام لا؟

## اكتب

سؤال من الحياة اليومية تحتاج اليه لعمل رسوم مضللة.



تعلم

| النتائج | التكرار |
|---------|---------|
| H,H     | 7       |
| H,T     | 3       |
| T,H     | 1       |
| T,T     | 2       |

رمى مهند قطعتي نقود 13 مرة وسجل النتائج كما مبين

في الجدول المجاور:

$$1. \text{ اوجد النسبة } \frac{\text{عدد ظهور (H,T)}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$$

$$2. \text{ اوجد النسبة } \frac{\text{عدد ظهور (H,T)}}{\text{عدد مرات التجربة}}$$

هل النسبة في السؤال الاول تساوي النسبة في السؤال الثاني ؟ وضح ذلك.

فكرة الدرس

- حساب الاحتمال التجريبي.
- حساب الاحتمال النظري.
- المفردات
- الاحتمال التجريبي.
- الاحتمال النظري.
- فضاء العينة.

[6-3-1] الاحتمال التجريبي والاحتمال النظري

Experimental Probability and Theoretical Probability

سبق ان درست حساب الاحتمال التجريبي والنظري حيث تحديد الاحتمال في الفقرة (تعلم) عن طريق اجراء التجربة والنواتج بهذه الطريقة تسمى الاحتمالات التجريبية .  
اما الاحتمالات المبنية على حقائق وخصائص معروفة فتسمى الاحتمالات النظرية

مثال (1) فضاء العينة لتجربة رمي قطعتي نقود هي :

$$\Omega = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$$

النسبة في السؤال الاول:

اذن عدد عناصر فضاء العينة يساوي 4

من الجدول عدد مرات ظهور الحدث H,T يساوي 3

الاحتمال نظري

$$P(H, T) = \frac{\text{عدد ظهور (H,T)}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}} \Rightarrow \therefore P(H, T) = \frac{3}{4}$$

النسبة في السؤال الثاني:

من الجدول عدد مرات ظهور الحدث H,T يساوي 3

عدد مرات التجربة يساوي 13

الاحتمال تجريبي

$$P(H, T) = \frac{\text{عدد ظهور (H,T)}}{\text{عدد مرات التجربة}} \Rightarrow \therefore P(H, T) = \frac{3}{13}$$

الاحتمالات النظرية تزودنا بنتائج التجربة من دون الحاجة الى إجرائها (تعتمد على فضاء العينة للتجربة).

الاحتمالات التجريبية تزودنا بنتائج التجربة بتكرارها عدة مرات (تعتمد على تكرار التجربة).

مثال (2)

وجد باحث في مصنع بطاريات السيارات ان احتمال كون البطارية غير صالحة هو  $\frac{3}{20}$  أنظري هذا الاحتمال ام تجريبي؟ واذا اراد المصنع الحصول على 240 بطارية غير صالحة. فكم بطارية كان على المصنع انتاجه ؟

هذا الاحتمال تجريبي، لانه يعتمد على ما حدث فعلاً. استعمل التناسب لحل الجزء الثاني من المثال

كل 3 بطاريات من اصل 20 غير صالحة

اذن 240 بطارية غير صالحة من اصل X بطارية ينتجها المصنع.

اكتب التناسب

الضرب التبادلي

اقسم المعادلة على 3

$$\frac{3}{20} = \frac{240}{X}$$

$$3X = 4800$$

$$X = \frac{4800}{3}$$

$$X = 1600$$

∴ يجب ان ينتج المصنع 1600 بطارية



### مثال (3) عند رمي حجر النرد مرة واحدة جد احتمال :

- (i) الحدث: الحصول على المجموع 5 على وجهي الحجرين.  
(ii) الحدث : الرقم على وجه الحجر الاول ضعف الرقم على وجه الحجر الثاني.

هذا الاحتمال نظري : لان الحجرين رميا مرة واحدة.

عدد ارقام الحجر الاول = 6 ، عدد ارقام الحجر الثاني = 6

اذن بحسب قانون العد الاساسي : عدد عناصر فضاء العينة تساوي  $6 \times 6$  وتساوي 36

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1) \dots\dots (1,6) \\ (2,1) \dots\dots (2,6) \\ \vdots \\ (6,1) \dots\dots (6,6) \end{array} \right\} \quad n = 36$$

i)  $E_1 = \{(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)\}, m = 4, \quad n = 36$

الحدث: مجموع 5 على وجهي الحجرين

$$P(E_1) = \frac{m}{n}$$

قانون الاحتمال

$$P(E_1) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

بالتعويض وبالتبسيط

ii)  $E_2 = \{(2,1), (4,2), (6,3)\}, m = 3, n = 36$

الحدث: رقم الحجر الاول ضعف رقم الحجر الثاني

$$\therefore P(E_2) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

بالتعويض وبالتبسيط

## Disjoint Events

## [6-3-2] الاحداث المتنافية

الحدثان المتنافيان: هما حدثان لا يمكن ان يتحققا معاً في تجربة واحدة.

مثلاً: عند رمي حجر النرد مرة واحدة، فان الحصول على عدد فردي و عدد زوجي معاً مستحيل اذن هما حدثان متنافيان.

حساب احتمال الحدثين المتنافيين:

اذا كان  $E_1, E_2$  حدثين متنافيين فان احتمال وقوع  $E_1$  او وقوع  $E_2$  يساوي مجموع احتمالي الحدثين اي :

$$P(E_1 \text{ or } E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

### مثال (4)

عند رمي حجر النرد مرة واحدة، جد احتمال الحصول على العدد 3 او على عدد زوجي.

بما انه لا يمكن ان يظهر على وجه الحجر العدد 3 في الوقت نفسه مع عدد زوجي فان هذين الحدثين متنافيان

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

فضاء العينة

$$P(E_1) = \frac{m}{n}, m = 1, n = 6 \Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{6}$$

احتمال الحصول على العدد 3 هو

$$P(E_2) = \frac{m}{n}, m = 3, n = 6 \Rightarrow P(E_2) = \frac{3}{6}$$

احتمال الحصول على العدد زوجي

$$P(E_1 \text{ or } E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

احتمال الحوادث المتنافية

$$P(E_1 \text{ or } E_2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

بالتعويض وبالتبسيط

اذن احتمال ظهور العدد 3 او عدد زوجي في رمي حجر النرد يساوي  $\frac{2}{3}$



### مثال (5)

عند رمي حجرى النرد مرة واحدة، جد احتمال الحصول على عددين متساويين او مجموع عدد عناصر فضاء العينة عند رمي حجرى النرد يساوي 36 عددين يساوي 3.

$$E_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد عناصر } E_1}{\text{فضاء العينة}} = \frac{6}{36}$$

$$E_2 = \{(1,2), (2,1)\}$$

$$P(E_2) = \frac{\text{عدد عناصر } E_2}{\text{فضاء العينة}} = \frac{2}{36}$$

$$P(E_1 \text{ or } E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$E_1, E_2$  حدثان متنافيان لاتوجد عناصر مشتركة بينهما.

احتمال الاحداث المتنافية

بالتعويض وبالتبسيط

### تأكّد من فهمك

في تجربة رمي حجرى النرد مرة واحدة، جد احتمال حدوث الاحداث الاتية :

- 1 العدان على وجهي الحجرين متساويان.
- 2 العدد على وجه الحجر الاول نصف العدد على وجه الحجر الثاني.
- 3 مجموع العددين على وجهي الحجرين يساوي 10.
- 4 مجموع العددين على وجهي الحجرين اقل من 5.
- 5 تجريبية الاحتمالات السابقة ام نظرية؟
- 6 كيس فيه 4 كرات حمراء، 3 كرات خضراء، كم كرة زرقاء يجب ان تضاف الى الكيس كي يكون احتمال سحب كرة حمراء  $\frac{2}{3}$  ؟ أنظري الاحتمال ام تجريبي ؟
- 7 وقف شخص في احدى تقاطعات مدينة بغداد فأحصى 25 سيارة شاهدها، منها 13 سيارة صفراء اللون، 7 سيارات بيضاء اللون، 5 سيارات رصاصية اللون. قدّر احتمال ان تكون السيارة التالية التي تجتاز التقاطع صفراء اللون . وما نوع الاحتمال أنظري ام تجريبي ؟ اكتب النسبة بشكل كسر عشري ونسبة مئوية .
- 8 عند رمي حجرى نرد، جد احتمال حصول على عددين مجموعهما 5 او مجموعهما 11. هل الحدثان متنافيان بين ذلك.

### تدرب وحلّ التمرينات

في تجربة رمي حجرى النرد مرة واحدة، جد احتمال حدوث الاحداث الاتية :

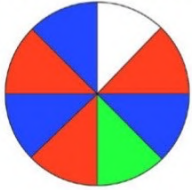
- 9 مجموع العددين على وجهي الحجرين اكبر من 8.

- 10 مجموع العددين على وجهي الحجرين يساوي 12.

11 اجريت دراسة على 100 شخص، فاجاب 15 منهم انهم يستعملون اليد اليسرى فاذا اجريت الدراسة على 400 شخص، فكم تتوقع عدد الاشخاص الذين يستعملون اليد اليسرى ؟

12 جد احتمال سحب بطاقة تحمل عدداً فردياً او تحمل عدداً من مضاعفات العدد 2 من بطاقات مرقمة من 1 الى 9

### تدرب وحل مسائل حياتية



13 **تسلية:** بأي لون يجب تلوين الفراغ بحيث يكون احتمال ان يأتي المؤشر عند هذا اللون  $\frac{1}{4}$  ؟

14 **طوابع:** يهوى مهند جمع الطوابع البريدية، فمن بين 60 طابعاً جمع 25 طابعاً للدول العربية، 15 طابعاً لدول افريقية و 20 طابعاً لدول اوربية. قدر احتمال ان يكون الطابع الذي سيجمعه أوربياً.

15 **رياضية:** في التدريب على كرة السلة، اصاب لاعب السلة 15 كرة من 25 رمية، ما الاحتمال التجريبي لان يصيب لاعب السلة في الرمية التالية ؟ اكتب الجواب على صورة كسر و عدد عشري و نسبة مئوية .

16 **دراسة:** احصى رجل في عائلته 3 افراد عيونهم زرق من كل 22 فرداً، اذا رزق الرجل بمولود جديد، ما احتمال ان تكون عيناه ليست زرقاء ؟

### فكر



17 **تحذ:** قرص ذو مؤشر، مقسم على ثلاثة اجزاء في الشكل المجاور: نصف القرص اخضر ثلثه احمر و سدسه ازرق. ما احتمال ان يدل مؤشر القرص على الأخضر او الأحمر بعد اطلاقه؟

18 **اكتشف الخطأ:** يريد كل من سارة و مهند تحديد احتمال اختيار كرة زرقاء او حمراء عشوائياً من كيس يحتوي على 5 كرات زرق، 4 كرات حمراء، 6 كرات صفراء ايهما كانت اجابته صحيحة ؟ فسر اجابتك.



| مهند                                                                                      | سارة                                                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| $P(R \text{ or } B) = P(R) \times P(B) = \frac{4}{15} \times \frac{5}{15} = \frac{4}{45}$ | $P(R \text{ or } B) = P(R) + P(B) = \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ |

### اكتب

توضيحاً لما يمثله كل عدد في الكسر  $\frac{2}{9}$  الذي يمثل احتمال وقوع حدث نظري او تجريبي.



## تعلم



تشير تقارير شركة الخطوط الجوية العراقية الى وصول طائراتها في موعدها المحدد بنسبة  $\frac{19}{20}$  ، كما تشير النسبة 2% الى فقدان الامتعة من الحالات. فما احتمال وصول طائرة من موعدها وبدون فقدان امتعة؟

## فكرة الدرس

- حساب احتمال الاحداث المستقلة.
- حساب احتمال الاحداث المترابطة.
- المفردات
- الاحداث المستقلة.
- الاحداث المترابطة.

## Independent Events

## [6-4-1] الاحداث المستقلة

سبق وان تعلمت مفهوم الاحداث المستقلة (نتيجة احدهما لا تؤثر في نتيجة الآخر) في هذا الدرس سوف نتعلم حساب احتمال الحوادث المستقلة، اذا كان:  $E_1, E_2$  حدثين مستقلين فان احتمال وقوعهما معاً يساوي حاصل ضرب احتمال  $E_1$  في احتمال الحدث  $E_2$ ، أي:

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

## مثال (1) في فقرة تعلم:

$$P(E_1) = \frac{19}{20}$$

$$P(E_2) = \frac{1}{50}$$

ان احتمال وصول الطائرة في موعدها هو

ان احتمال فقدان الامتعة هو

ان وصول الطائرة في موعدها لا يؤثر في فقدان الامتعة، هذا يعني ان الحدثين مستقلان.

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

احتمال الاحداث المستقلة

$$= \frac{19}{20} \times \frac{1}{50}$$

بالتعويض

$$= \frac{19}{1000} = 0.019 = 1.9\%$$

مثال (2) كيس يحتوي على 3 كرات حمراء، 4 كرات خضراء، 5 كرات زرقاء، سحبت منه كرة عشوائياً ثم اعيدت وسحبت كرة ثانية. جد احتمال سحب كرة حمراء ثم كرة خضراء.

$$P(R) = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{العدد الكلي للكرات}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

سحب الكرة الحمراء

$$P(G) = \frac{\text{عدد الكرات الخضراء}}{\text{العدد الكلي للكرات}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

سحب الكرة الخضراء

الحدثان مستقلان.

$$P(R \text{ and } G) = P(R) \times P(G)$$

احتمال الاحداث المستقلة (لان الكرة الاولى اعيدت الى الكيس)

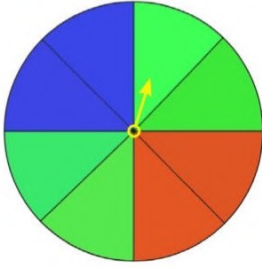
$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

بالتعويض

اذن احتمال سحب كرة حمراء ثم كرة خضراء مع اعادة الكرة الحمراء يساوي  $\frac{1}{12}$

### مثال (3)

إذا اختيرت احدى البطاقات المرقمة وتدوير مؤشر القرص الدوار كما مبين في الشكل المجاور.



ما احتمال ان يكون الناتج عدداً زوجياً واللون ازرق؟

نفرض ان  $P(E_1)$  احتمال العدد الزوجي.

$$P(E_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

نفرض ان  $P(E_2)$  احتمال وقوف المؤشر على اللون الازرق.

$$P(E_2) = \frac{1}{4}$$

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

احتمال الحوادث المستقلة

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

بالتعويض والتبسيط

اذن احتمال (عدد زوجي ولون ازرق) هو  $\frac{1}{8} = 12.5\%$

### Dependent Events

### [6-4-2] الاحداث المترابطة

الاحداث المترابطة (نتيجة ادهما تؤثر في نتيجة الآخر)

إذا كان  $E_1$  و  $E_2$  حدثين مترابطين فان احتمال وقوعهما معاً هو حاصل ضرب احتمال الحدث الاول  $E_1$  في ضرب (احتمال الحدث  $E_2$  بعد حصول الحدث  $E_1$ ) ، اي:

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2 \text{ after } E_1)$$

### مثال (4)

في مثال (2)، لو لم نعيد الكرة الحمراء الى الكيس. ما احتمال سحب كرة حمراء ثم كرة خضراء؟

$$P(R) = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{العدد الكلي للكرات}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

سحب الكرة الحمراء

عدم اعادة الكرة الحمراء للكيس يعني ان عدد الكرات الحمر اصبح 2 كرة، والعدد الكلي لكرات في هذه الحالة هو 11 كرة بدل 12.

$$P(G \text{ after } R) = \frac{\text{عدد الكرات الخضراء}}{\text{العدد الكلي الجديد للكرات}} = \frac{4}{11}$$

سحب الكرة الخضراء

الحدثان مترابطان

$$P(R \text{ and } G) = P(R) \times P(G \text{ after } R)$$

احتمال الحوادث المترابطة

$$= \frac{1}{4} \times \frac{4}{11} = \frac{1}{11}$$

بالتعويض وبالتبسيط

اذن احتمال سحب كرة حمراء ثم خضراء دون اعادة الكرة الحمراء يساوي  $\frac{1}{11}$



**مثال (5)** صندوق فيه 5 كرات حمراء، 3 زرق، 8 صفراء، سحب كرة من الصندوق من دون اعادتها ثم سحب

ثانية، جد (صفراء ثم حمراء)  $P(Y)$

$$P(Y) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

افرض  $P(Y)$  سحب صفراء، اصبح في الصندوق 5 كرات حمراء، 3 زرقاء، 7 صفراء، اي مجموعهما 15 كرة. عدم اعادة الكرة الصفراء، سحب كرة حمراء من الصندوق.

$$P(R \text{ after } Y) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

الحدثان مترابطان

$$P(Y \text{ and } R) = P(Y) \times P(R \text{ after } Y)$$

احتمال الحوادث المترابطة

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

بالتعويض والتبسيط

اذن احتمال سحب كرة صفراء ثم كرة حمراء من دون اعادة الكرة الصفراء هو  $\frac{1}{6}$

**الخلاصة:**

1. نجد  $P(E_2), P(E_1)$

2. اذا كان  $E_1, E_2$  مستقلين فان:  $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$

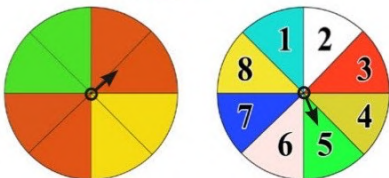
3. اذا  $E_1, E_2$  مترابطين فان:  $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2 \text{ after } E_1)$

**تأكّد من فهمك**



1 صندوق فيه 3 كرات حمراء، 3 كرات خضراء، ما احتمال سحب كرتين خضراء من دون اعادة الكرة الاولى؟

2 اطلق مؤشر في القرصين المقابلين مرة واحدة، ما احتمال ان يأتي مؤشر الاول على اللون الأحمر ومؤشر الثاني على العدد 5؟

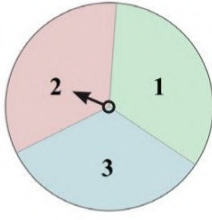
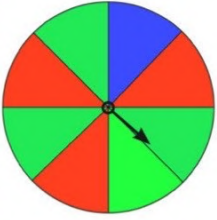


3 رمي قطعتي نقود مرة واحدة، ما احتمال ظهور صورة على القطعة الاولى، وكتابة على القطعة الثانية.

**تدرب وحل التمرينات**

4 صندوق فيه 5 بطاقات حمراء، 4 بطاقات سوداء، 6 بطاقات خضراء.

سحبت بطاقة من دون اعادتها للصندوق وسحبت بطاقة ثانية، ما احتمال ان تكون البطاقة الاولى حمراء والثانية سوداء؟



5 اطلق مؤشر في القرصين المجاورين مرة واحدة، ما احتمال ان يأتي مؤشر الاول على اللون الأخضر ومؤشر الثاني على العدد 3؟

6 رمي حجري النرد مرة واحدة، ما احتمال ظهور عدد يقبل القسمة على 3 على الحجر الاول، وعدد يقبل القسمة على 5 على الحجر الثاني؟

### تدرب وحل مسائل حياتية

7 **حلولي:** تحتوي علبة على 10 قطع حلوى بطعم الفراولة، 15 قطعة بطعم الشكولاته، 5 قطع بطعم الليمون. ما احتمال اختيار قطعتين عشوائياً الواحدة تلو الاخرى من دون ارجاع على ان تكون الاولى بطعم الشكولاته والثانية بطعم الليمون؟

8 **كتب:** اختارت سها كتاباً من رف في غرفتها واعادته ثم اختارت كتاباً آخر، ما احتمال ان يكون اختيار الكتاب من كتب الرياضيات؟ علماً ان الرف يحتوي على 5 كتب رياضيات، 2 كتاب لغة انكليزية، 3 كتب علوم.

### فكّر

9 **اكتشف الخطأ:** تريد كل من جمانة واختها سالي تحديد احتمال اختيار كرة حمراء واخرى صفراء عشوائياً من كيس يحتوي 4 كرات حمراء، 5 كرات صفراء من دون ارجاع الكرة بعد السحب.

|                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>سالي</p> <p>جمانة</p> <p><math>P(\text{كرات حمراء وكرات صفراء})</math></p> <p><math>P(\text{كرات صفراء}) \times P(\text{كرات حمراء})</math></p> <p><math>\frac{4}{9} \times \frac{5}{8}</math></p> | <p><math>P(\text{كرات حمراء وكرات صفراء})</math></p> <p><math>P(\text{كرات صفراء}) \times P(\text{كرات حمراء})</math></p> <p><math>\frac{4}{9} \times \frac{5}{9}</math></p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

ايهما كان حلها صحيحاً؟

10 **تحّد:** عند رمي حجر النرد وقطعة نقد، ما احتمال ظهور رقم اكبر من 2 واصغر من 6 على حجر النرد والكتابة على قطعة النقد؟

### مسألة مفتوحة

11 10 بطاقات بثلاثة اشكال مختلفة، اكتب مسألة تتعلق بسحب بطاقتين عشوائياً من دون ارجاعهما على ان يكون الاحتمال  $\frac{1}{15}$

مثالاً على حدثين مستقلين ومثالاً آخر على حدثين مترابطين.

اكتب



1 وزع استبيان على 30 طالب من بين 100 طالب، اجب عما يأتي:

(i) حدّد العينة والمجتمع الذي اختير منه.

(ii) صف أسلوب توزيع الاستبيان.

(iii) حدّد ما اذا كانت العينة متحيزة ام لا.

2 كيف تميز بين الرسوم البيانية المضللة والرسوم البيانية غير المضللة؟

3 رمي حجر النرد 25 مرة وكانت النتائج كما موضح في الجدول الآتي:

| النتيجة    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------|---|---|---|---|---|---|
| عدد المرات | 2 | 6 | 3 | 5 | 2 | 7 |

(i) ما نوع الاحتمال؟

(ii) جد احتمال ظهور العدد 4.

4 في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة، جد:

(i) نوع الاحتمال أنظري ام تجريبي.

(ii) احتمال الحصول على عدد يقبل القسمة على 4.

5 وقف مهند في احدى تقاطعات مدينة بغداد، واحصى انواع السيارات عند التقاطع، من بين 20 سيارة شاهدها،

احصى 10 سيارات صالون، 7 سيارات نقل صغيرة لنقل الركاب، 3 سيارات حمل.

قدر احتمال ان تكون السيارة التالية التي تجتاز التقاطع سيارة صالون.

# تمريبات الفصول

Multiple choice

الاختيار من متعدد

العلاقات والمتباينات في الأعداد الحقيقية  
Relations and Inequalities in Real Numbers

الفصل الأول

المقادير الجبرية  
Algebraic Expressions

الفصل الثاني

المعادلات  
Equations

الفصل الثالث

الهندسة الاحداثية  
Coordinate Geometry

الفصل الرابع

الهندسة والقياس  
Geometry and Measurement

الفصل الخامس

الاحصاء والاحتمالات  
Statistics and Probabilities

الفصل السادس



## الدرس [1-1] ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية

## Ordering Operations in Real Numbers

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية:

1  $(\sqrt{2} + \sqrt{7})(\sqrt{2} + \sqrt{7}) = \dots$

- a)
- $2+9\sqrt{7}$
- b)
- $2+9\sqrt{2}$
- c)
- $9+2\sqrt{14}$
- d)
- $2+9\sqrt{14}$

2  $\frac{6\sqrt{50}}{3\sqrt[3]{-8}} \div \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{7}} = \dots$

- a)
- $\frac{-5}{2}$
- b)
- $\frac{-2}{2}$
- c)
- $\frac{\sqrt{2}}{5}$
- d)
- $\frac{-\sqrt{2}}{5}$

3  $(-27)^{\frac{1}{3}} (\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{32}) = \dots$

- a)
- $\frac{-5}{\sqrt{2}}$
- b)
- $\frac{5}{\sqrt{2}}$
- c)
- $\frac{\sqrt{2}}{5}$
- d)
- $\frac{-\sqrt{2}}{5}$

بسّط الجملة العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية:

4  $\frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \dots$

- a)
- $5+6\sqrt{2}$
- b)
- $5-6\sqrt{2}$
- c)
- $2\sqrt{6}-5$
- d)
- $2\sqrt{6}+5$

استعمل ترتيب العمليات واكتب الناتج مقرباً إلى مرتبتين عشريتين مستعملاً الحاسبة:

5  $(\frac{1}{3})^2 - 3^{-2} - (5)^{\frac{3}{2}} \approx \dots$

- a) -18.11 b) 18.11 c) 11.18 d) -11.18

## Mappings

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 إذا كانت  $f: Z \rightarrow R$  إذ  $f(x) = 3x - 2$  فإن العدد 10 هو صورة للعدد:

- a) 5                      b) 4                      c) 3                      d) 2

2 ليكن  $f: A \rightarrow B$  إذ  $A = \{2, 3, 4, 5\}$  ،  $B = \{4, 6, 8\}$  وإن  $f = \{(2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 8)\}$  فإن  $f$  يمثل تطبيقاً شاملاً لأن:

- a) المدى  $\neq$  المجال المقابل                      b) تطبيق غير متباين  
c) المدى هو مجموعة  $A$                       d) المدى = المجال المقابل

3 إذا كانت  $f: Z \rightarrow Z$  إذ  $f(x) = 2x - 3$  و  $g: Z \rightarrow Z$  إذ  $g(x) = x + 1$  فإن التطبيق  $(g \circ f)(x)$  هو:

- a)  $2x - 2$                       b)  $2x - 4$   
c)  $2x + 2$                       d)  $2x + 4$

4 ليكن  $f: \{2, 3, 5\} \rightarrow N$  إذ  $f(x) = 3x - 1$  وإن  $g: N \rightarrow N$  إذ  $g(x) = x + 1$  فإن مدى  $g \circ f$  هو المجموعة:

- a)  $\{5, 8, 14\}$   
b)  $\{5, 6, 9\}$   
c)  $\{6, 12, 15\}$   
d)  $\{6, 9, 15\}$

5 إذا كان التطبيق  $f: Q \rightarrow Q$  إذ  $f(x) = 4x + 1$  والتطبيق  $g: Q \rightarrow Q$  إذ  $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$  .

جد قيمة  $x$  إذا كانت  $(f \circ g)(x) = 45$  . فإن قيمة  $x$  هي:

- a)  $\pm 5$   
b)  $\pm 6$   
c)  $\pm 7$   
d)  $\pm 8$



## Compound Inequalities

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبرياً:

1  $-10 < x$  و  $x \leq -2$

a)  $\{x: -10 \leq x\} \cap \{x: x \leq -2\}$

b)  $\{x: -10 < x\} \cap \{x: x \leq -2\}$

c)  $\{x: -10 \leq x\} \cup \{x: x \leq -2\}$

d)  $\{x: -10 < x\} \cup \{x: x \leq -2\}$

2  $16 < 3z + 9$  و  $3z + 9 < 30$

a)  $\{z: \frac{3}{7} \leq z < 7\}$

b)  $\{z: \frac{7}{3} < z \leq 7\}$

c)  $\{z: \frac{3}{7} < z < 7\}$

d)  $\{z: \frac{7}{3} < z < 7\}$

حل المتباينة المركبة التي تتضمن (أو) جبرياً:

3  $\frac{y+5}{3} < \frac{1}{3}$  أو  $\frac{y+5}{3} > \frac{7}{3}$

a)  $\{y: y < 4\} \cap \{y: y > 2\}$

b)  $\{y: y > -4\} \cup \{y: y < 2\}$

c)  $\{y: y < -4\} \cap \{y: y > -2\}$

d)  $\{y: y < -4\} \cup \{y: y > 2\}$

اكتب المتباينة المركبة التي تبين مدى طول الضلع الثالث في المثلث إذا كان طولا الضلعين الآخرين للمثلث معلومين:

4  $8\text{cm}, 2\text{cm}$

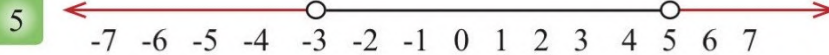
a)  $6 \leq x < 10$

b)  $6 \leq x \leq 10$

c)  $6 < x < 10$

d)  $6 < x \leq 10$

اكتب المتباينة التي مجموعة الحل لها على مستقيم الأعداد هي:



a)  $y \leq -3$  أو  $y > 5$

b)  $y \leq -3$  أو  $y \geq 5$

c)  $y < -4$  أو  $y \geq 5$

d)  $y < -3$  أو  $y > 5$

## Absolute Value Inequalities

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل متباينات القيمة المطلقة الآتية:

1  $|y - 8| < 13$

a)  $5 < y < -21$

b)  $-5 \leq y \leq 21$

c)  $-5 < y < 21$

d)  $-5 < y \leq 21$

2  $|3x| - 7 < 1$

a)  $-\frac{8}{3} \leq x < \frac{8}{3}$

b)  $-\frac{8}{3} < x \leq \frac{8}{3}$

c)  $-\frac{8}{3} \leq x \leq \frac{8}{3}$

d)  $-\frac{8}{3} < x < \frac{8}{3}$

3  $|6 - 3y| \geq 9$

a)  $y \leq 1$  أو  $y \geq -5$

b)  $y < -1$  أو  $y > 5$

c)  $y > -1$  أو  $y < 5$

d)  $y \leq -1$  أو  $y \geq 5$

4  $|\frac{7 - 2y}{3}| \geq 3$

a)  $y \leq -1$  أو  $y \geq 8$

b)  $y < -1$  أو  $y \geq 8$

c)  $y < -1$  أو  $y > 8$

d)  $y < -1$  أو  $y > 8$



## Multiplying Algebraic Expressions

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري آخر:

1  $(x + 5)^2$

- a)
- $x^2 - 10x + 25$
- b)
- $x^2 + 10x + 25$
- c)
- $x^2 + 5x + 25$
- d)
- $x^2 - 5x + 25$

2  $(z - \sqrt{7})^2$

- a)
- $z^2 - 7z + 49$
- b)
- $z^2 + 7y + 49$
- c)
- $z^2 - \sqrt{7}z + 7$
- d)
- $z^2 - 2\sqrt{7}z + 7$

3  $(x + 8)(x - 8)$

- a)
- $x^2 - 64$
- b)
- $x^2 + 64$
- c)
- $x^2 + 16$
- d)
- $x^2 - 16$

4  $(y + \sqrt{6})(y - \sqrt{6})$

- a)
- $y^2 - \sqrt{12}$
- b)
- $y^2 - 6$
- c)
- $y^2 + \sqrt{12}$
- d)
- $y^2 + 6$

5  $(y - 2)(y^2 + 2y + 4)$

- a)
- $y^3 + 8$
- b)
- $y^3 - 8$
- c)
- $y^3 - 4$
- d)
- $y^3 - 16$

6  $(y + \frac{1}{5})^3$

- a)
- $y^3 - \frac{3}{5}y^2 + \frac{3}{25}y - \frac{1}{125}$
- b)
- $y^3 + \frac{3}{5}y^2 - \frac{3}{25}y + \frac{1}{125}$
- 
- c)
- $y^3 + \frac{3}{5}y^2 + \frac{3}{25}y + \frac{1}{125}$
- d)
- $y^3 - \frac{3}{5}y^2 - \frac{3}{25}y - \frac{1}{125}$

## الدرس [2-2] تحليل المقدار الجبري بالعامل المشترك الأكبر

## Factoring the Algebraic Expression by using Greater Common Factor

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حلل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF):

1  $6y^2(3y - 4) + 36y$

a)  $6y(3y^2 + 4y + 6)$

b)  $6y(3y^2 + 4y - 6)$

c)  $6y(3y^2 - 4y - 6)$

d)  $6y(3y^2 - 4y + 6)$

حلل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

2  $\frac{1}{4}(x + 9) - \frac{1}{2}x^2(x + 9)$

a)  $(x + 9)(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^2)$

b)  $(x - 9)(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^2)$

c)  $(x + 9)(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x^2)$

d)  $(x + 9)(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2)$

3  $\sqrt{2}v(x - 1) - \sqrt{3}t(x - 1)$

a)  $(x + 1)(\sqrt{2}v - \sqrt{3}t)$

b)  $(x - 1)(\sqrt{2}v - \sqrt{3}t)$

c)  $(x - 1)(\sqrt{2}v + \sqrt{3}t)$

d)  $(x + 1)(\sqrt{2}v + \sqrt{3}t)$

حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل:

4  $3y^3 - 9y^2 + 5y - 15$

a)  $(y + 3)(3y^2 + 5)$

b)  $(y + 3)(3y^2 - 5)$

c)  $(y - 3)(3y^2 + 5)$

d)  $(y - 3)(3y^2 - 5)$

حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس:

5  $20y^3 - 4y^2 + 3 - 15y$

a)  $(5y + 1)(4y^2 - 3)$

b)  $(5y - 1)(4y^2 + 3)$

c)  $(5y - 1)(4y^2 - 3)$

d)  $(5y + 1)(4y^2 + 3)$



## الدرس [2-3] تحليل المقدار الجبري بالمتطابقات

## Factoring the Algebraic Expression by using Special Identities

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل كل مقدار جبري من المقادير الجبرية الآتية:

1  $12y^3z - 3yz^3$

a)  $3y(2y - z)(y + 2z)$

b)  $3z(2y - z)(2y + z)$

c)  $3yz(2y - z)(2y + z)$

d)  $3yz(y - 2z)(y + 2z)$

2  $\frac{1}{6}x^3 - x\frac{1}{24}$

a)  $\frac{x}{6}(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$

b)  $\frac{x}{6}(x + \frac{1}{4})(x - \frac{1}{4})$

c)  $\frac{x}{3}(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$

d)  $\frac{x}{6}(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4})(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4})$

3  $4x^2 + 24x + 36$

a)  $(x + 6)^2$

b)  $(x - 6)^2$

c)  $4(x - 3)^2$

d)  $4(x + 3)^2$

حدد أي من المقادير الجبرية التالية يمثل مربعاً كاملاً:

4  $64 - 48y + 9y^2$

a)  $2(4)(3y) \neq -48y$  ليس مربعاً كاملاً لأن  $2(4)(3y) \neq -48y$

b)  $2(8)(4y) = 48y$  مربع كامل لأن  $2(8)(4y) = 48y$

c)  $-2(8)(3y) = -48y$  مربع كامل لأن  $-2(8)(3y) = -48y$

d)  $-4(4)(3y) \neq 48y$  ليس مربعاً كاملاً لأن  $-4(4)(3y) \neq 48y$

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري  $ax^2 + bx + c$  ليصبح مربعاً كاملاً:

5  $z^2 + \dots + 49$

a)  $14z$

b)  $-10z$

c)  $7z$

d)  $-7z$

6  $36 - 24x + \dots$

a)  $2x^2$

b)  $-2x^2$

c)  $4x^2$

d)  $-4x^2$

الدرس [2-4] تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة

## Factoring the Algebraic Expression of three terms by Probe and Error (Experiment)

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

1  $x^2 + 7x + 12$

a)  $(x - 3)(x + 4)$

b)  $(x + 3)(x + 4)$

c)  $(x - 1)(x + 7)$

d)  $(x - 3)(x - 4)$

2  $x^2 - 5x - 36$

a)  $(x - 6)(x + 6)$

b)  $(x + 12)(x - 3)$

c)  $(x - 9)(x + 4)$

d)  $(x + 9)(x - 4)$

3  $y^2 + 4y - 21$

a)  $(y - 7)(y + 3)$

b)  $(y + 7)(y - 3)$

c)  $(y - 7)(y - 3)$

d)  $(y + 7)(y + 3)$

ضع الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً:

4  $4y^2 - 2y - 12 = (2y \dots 3)(2y \dots 4)$

a)  $(2y - 3)(2y + 4)$

b)  $(2y + 3)(2y + 4)$

c)  $(2y - 3)(2y - 4)$

d)  $(2y + 3)(2y - 4)$

5  $48 - 30z + 3z^2 = (6 \dots 3z)(8 \dots z)$

a)  $(6 - 3z)(8 - z)$

b)  $(6 + 3z)(8 + z)$

a)  $(6 - 3z)(8 + z)$

b)  $(6 + 3z)(8 - z)$



الدرس [2-5] تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين أو فرق بين مكعبين

Factoring the Algebraic Expressions sum of two cubes or difference between two cubes

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

1  $8 + x^3$

a)  $(2 - x)(4 + 2x + x^2)$

b)  $(2 + x)(4 - 2x + x^2)$

c)  $(2 - x)(4 - 2x + x^2)$

d)  $(2 + x)(4 + 2x + x^2)$

2  $\frac{1}{z^3} + \frac{1}{64}$

a)  $(\frac{1}{z} + \frac{1}{4})(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4z} + \frac{1}{16})$

b)  $(\frac{1}{z} - \frac{1}{4})(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{4z} + \frac{1}{16})$

c)  $(\frac{1}{z} - \frac{1}{4})(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4z} + \frac{1}{16})$

d)  $(\frac{1}{z} + \frac{1}{4})(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{4z} + \frac{1}{16})$

3  $\frac{27}{125} + \frac{8}{x^3}$

a)  $(\frac{3}{5} - \frac{2}{x})(\frac{9}{25} + \frac{6}{5x} + \frac{4}{x^2})$

b)  $(\frac{3}{5} - \frac{2}{x})(\frac{9}{25} - \frac{6}{5x} + \frac{4}{x^2})$

c)  $(\frac{3}{5} + \frac{2}{x})(\frac{9}{25} - \frac{6}{5x} + \frac{4}{x^2})$

d)  $(\frac{3}{5} + \frac{2}{x})(\frac{9}{25} - \frac{6}{5x} - \frac{4}{x^2})$

4  $9 - \frac{1}{3}z^3$

a)  $\frac{1}{3}(3 - z)(9 + 3z - z^2)$

b)  $\frac{1}{3}(3 - z)(9 + 3z + z^2)$

c)  $\frac{1}{3}(3 + z)(9 + 3z + z^2)$

d)  $\frac{1}{3}(3 - z)(9 - 3z + z^2)$

5  $0.008x^3 - 1$

a)  $(0.02x - 1)(0.04x^2 + 0.002x + 1)$

b)  $(0.02x - 1)(0.04x^2 + 0.02x + 1)$

c)  $(0.2x + 1)(0.4x^2 - 0.2x + 1)$

d)  $(0.2x - 1)(0.04x^2 + 0.2x + 1)$

## Simplifying Rational Algebraic Expressions

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

اكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

1  $\frac{x+3}{4x} \times \frac{4x-12}{x^2-9}$

a)  $\frac{3}{x}$

b)  $\frac{x}{4}$

c)  $\frac{1}{4}$

d)  $\frac{1}{x}$

2  $\frac{z^2-2z-15}{9+3z} \times \frac{5}{z^2-25}$

a)  $\frac{5}{z+5}$

b)  $\frac{3}{5(z+5)}$

c)  $\frac{5}{3(z+5)}$

d)  $\frac{3}{z+5}$

3  $\frac{1-z^3}{1+z+z^2} \div \frac{(1-z)^2}{1-z^2}$

a)  $1-z$

b)  $1+z$

c)  $1+z+z^2$

d)  $1-z+z^2$

اكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

4  $\frac{2y^2+1}{y^3-1} - \frac{y}{y^2+y+1}$

a)  $\frac{y}{y+1}$

b)  $\frac{1}{y+1}$

c)  $\frac{1}{y-1}$

d)  $\frac{y}{y-1}$

5  $\frac{3y+1}{y+4} - \frac{y-4}{3y-1} - \frac{10+8y^2}{3y^2+11y-4}$

a)  $\frac{5}{(y+4)(3y-1)}$

b)  $\frac{3}{(y+4)(3y-1)}$

c)  $\frac{-3}{(y+4)(3y-1)}$

d)  $\frac{-5}{(y+4)(3y-1)}$



الدرس [3-1] حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين

## Solving the system of two Linear Equations with two variables

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

جد مجموعة حل للنظام بيانياً:

$$\begin{cases} y = 4x - 6 \\ y = x \end{cases}$$

- a)  $\{(-2, -2)\}$     b)  $\{(-2, 2)\}$     c)  $\{(2, -2)\}$     d)  $\{(2, 2)\}$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال التعويض لكل مما يأتي:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ 5x - 2y = 0 \end{cases}$$

- a)  $\{(2, 5)\}$     b)  $\{(-2, -5)\}$     c)  $\{(2, -5)\}$     d)  $\{(-2, 5)\}$

$$\begin{cases} \frac{3x}{4} - \frac{y}{2} = 4 \\ \frac{y}{2} - \frac{x}{4} = 2 \end{cases}$$

- a)  $\{(12, -10)\}$     b)  $\{(-12, -10)\}$     c)  $\{(12, 10)\}$     d)  $\{(-12, 10)\}$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال الحذف لكل مما يأتي:

$$\begin{cases} 7x - 4y = 12 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

- a)  $\{(-\frac{8}{5}, \frac{1}{5})\}$     b)  $\{(-\frac{8}{5}, -\frac{1}{5})\}$     c)  $\{(\frac{8}{5}, \frac{1}{5})\}$     d)  $\{(\frac{8}{5}, -\frac{1}{5})\}$

$$\begin{cases} 6y - 2x - 8 = 0 \\ y + x - 12 = 0 \end{cases}$$

- a)  $\{(8, -4)\}$     b)  $\{(8, 4)\}$     c)  $\{(-8, 4)\}$     d)  $\{(-8, -4)\}$

الدرس [3-2] حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد

## Solving Quadratic Equations with one variable

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل المعادلات التالية باستعمال العامل المشترك الأكبر والفرق بين مربعين:

1  $7z^2 - 21 = 0$     a)  $s = \{7, -7\}$     b)  $s = \{3, -3\}$     c)  $s = \{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\}$     d)  $s = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

2  $4(x^2 - 1) - 5 = 0$     a)  $s = \{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\}$     b)  $s = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$     c)  $s = \{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$     d)  $s = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

3  $(y + 7)^2 - 81 = 0$     a)  $s = \{2, -2\}$     b)  $s = \{16, -16\}$     c)  $s = \{2, -16\}$     d)  $s = \{-2, 16\}$

حل المعادلات التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

4  $4(y^2 - 1) = 45$     a)  $s = \{\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\}$     b)  $s = \{\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\}$     c)  $s = \{\frac{2}{7}, -\frac{2}{7}\}$     d)  $s = \{\frac{7}{4}, -\frac{7}{4}\}$

5  $x^2 - \frac{13}{16} = \frac{3}{16}$     a)  $s = \{\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\}$     b)  $s = \{\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\}$     c)  $s = \{2, -2\}$     d)  $s = \{1, -1\}$



الدرس [3-3] حل المعادلات التربيعية بطريقة التجربة

## Solving the quadratic equations by the experiment

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

1  $y^2 + 10y + 21 = 0$     a)  $s = \{3, -7\}$     b)  $s = \{-3, 7\}$     c)  $s = \{-3, -7\}$     d)  $s = \{3, 7\}$

2  $x^2 - 5x - 36 = 0$     a)  $s = \{7, -8\}$     b)  $s = \{-4, 9\}$     c)  $s = \{4, -9\}$     d)  $s = \{-4, -9\}$

3  $32 + 12x - 9x^2 = 0$     a)  $s = \{\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\}$     b)  $s = \{\frac{-4}{3}, \frac{-8}{4}\}$     c)  $s = \{\frac{4}{3}, \frac{-8}{3}\}$     d)  $s = \{\frac{-4}{3}, \frac{8}{3}\}$

4 ما العدد الذي مربعه يزيد عليه بمقدار 42 ؟

a)  $s = \{7, 6\}$     b)  $s = \{7, -6\}$     c)  $s = \{-7, 6\}$     d)  $s = \{-7, -6\}$

5 عدنان حاصل ضربهما 54 ، أحدهما يزيد عن الآخر بمقدار 3 . فما العدنان؟

a)  $s = \{6, 9\}$     b)  $s = \{6, -9\}$     c)  $s = \{-6, 9\}$     d)  $s = \{-6, -9\}$

الدرس [3-4] حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

## Solving the Quadratic Equations by perfect square

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

1  $x^2 + 6x + 9 = 0$       a)  $x = 6$       b)  $x = -3$       c)  $x = 4$       d)  $x = 3$

2  $4z^2 - 20z + 25 = 0$       a)  $z = \frac{-5}{2}$       b)  $z = \frac{-2}{5}$       c)  $z = \frac{5}{2}$       d)  $z = \frac{2}{5}$

3  $\frac{1}{16} - \frac{1}{2}x + x^2 = 0$       a)  $y = \frac{1}{4}$       b)  $y = \frac{-1}{4}$       c)  $y = \frac{1}{2}$       d)  $y = \frac{-1}{2}$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع:

4  $x^2 - 12x = 13$       a)  $s = \{13, 1\}$       b)  $s = \{13, -1\}$       c)  $s = \{-13, 1\}$       d)  $s = \{-13, -1\}$

5  $y^2 - \frac{1}{3}y = \frac{2}{9}$       a)  $\{\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\}$       ,      b)  $\{\frac{-3}{2}, \frac{1}{3}\}$

c)  $\{\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\}$       ,      d)  $\{\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\}$

6  $z^2 + 2\sqrt{5}z = 4$       a)  $s = \{3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}\}$       b)  $s = \{\sqrt{5} - 3, 3 - \sqrt{5}\}$

c)  $s = \{3 - \sqrt{5}, -3 - \sqrt{5}\}$       d)  $s = \{\sqrt{5} + 3, \sqrt{5} - 3\}$



## الدرس [3-5] حل المعادلات بالقانون العام

## Using General Law to solve the equations

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

1  $y^2 - 5y - 5 = 0$

a)  $s = \left\{ \frac{3 + 5\sqrt{5}}{2}, \frac{3 - 5\sqrt{5}}{2} \right\}$

b)  $s = \left\{ \frac{5 + 3\sqrt{5}}{4}, \frac{3 - 5\sqrt{5}}{4} \right\}$

c)  $s = \left\{ \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}, \frac{5 - 3\sqrt{5}}{2} \right\}$

d)  $s = \left\{ \frac{5 + 3\sqrt{3}}{2}, \frac{3 - 3\sqrt{3}}{2} \right\}$

2  $2x^2 - 8x = -3$

a)  $s = \left\{ \frac{4 + \sqrt{10}}{2}, \frac{4 - \sqrt{10}}{2} \right\}$

b)  $s = \left\{ \frac{2 + \sqrt{10}}{2}, \frac{4 + \sqrt{10}}{2} \right\}$

c)  $s = \left\{ \frac{4 + \sqrt{5}}{4}, \frac{4 - \sqrt{5}}{4} \right\}$

d)  $s = \left\{ \frac{2 + \sqrt{5}}{2}, \frac{2 - \sqrt{5}}{2} \right\}$

3  $3x^2 - 6(2x+1) = 0$

a)  $s = \{2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\}$

b)  $s = \{2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}\}$

c)  $s = \{2 + \sqrt{6}, 2 - \sqrt{6}\}$

d)  $s = \{6 + \sqrt{6}, 6 - \sqrt{6}\}$

حدّد جذر المعادلة باستعمال المميز:

4  $x^2 - 6x - 7 = 0$

(b) جذران حقيقيان غير نسبيين

(a) جذران حقيقيان نسبيين

(d) جذران غير حقيقيين (مجموعة الحل في  $\emptyset = R$ )(c) جذران حقيقيان متساويان  $\left(\frac{-b}{2a}\right)$ 5 ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة  $y^2 - (k + 10)y + 16 = 0$  متساويين؟

a)  $k = 2, -18$

b)  $k = -2, -18$

c)  $k = 6, 18$

d)  $k = -6, -18$

## Solving the Fractional Equations

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات الآتية:

1  $\frac{2}{12x^2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4x}$  a)  $s = \{2, \frac{1}{2}\}$  b)  $s = \{-2, \frac{1}{2}\}$  c)  $s = \{2, \frac{-1}{2}\}$  d)  $s = \{-2, \frac{-1}{2}\}$

2  $\frac{8x}{5} = \frac{5}{8x}$  a)  $s = \{\frac{5}{8}, \frac{-8}{5}\}$  b)  $s = \{\frac{5}{8}, \frac{8}{5}\}$  c)  $s = \{\frac{5}{8}, \frac{-5}{8}\}$  d)  $s = \{\frac{8}{5}, \frac{-8}{5}\}$

3  $\frac{16x - 64}{x^2} = 1$  a)  $x = -8$  b)  $x = 8$  c)  $x = -6$  d)  $x = 6$

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات الآتية:

4  $\frac{2}{x-2} - \frac{3}{x-1} = 1$  a)  $s = \{2 + \sqrt{7}, 2 - \sqrt{7}\}$  b)  $s = \{1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}\}$   
c)  $s = \{1 + \sqrt{7}, 1 - \sqrt{7}\}$  d)  $s = \{2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\}$

5  $\frac{3y}{y-4} + \frac{y}{y-2} = \frac{5y^2 - 4y + 8}{y^2 - 6y + 8}$  a)  $s = \{4, -2\}$  b)  $s = \{-4, -2\}$  c)  $s = \{-4, 2\}$  d)  $s = \{4, 2\}$



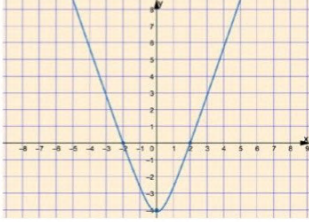
## الدرس [4-1] التمثيل البياني للمعادلات في المستوى الاحداثي

## Graphical Representation of the Equation in the Coordinate Plane

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

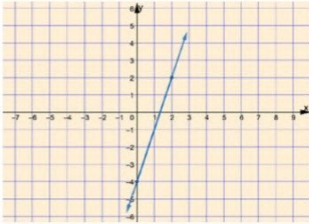
1 المستقيم الذي معادلته  $y = \frac{3}{2}$  .

- a) لا يقطع اي من المحورين    b) يوازي محور السينات    c) يوازي محور الصادات    d) يقطع المحورين



2 أي المعادلات التالية تعبر عن المعادلة المتمثلة بيانياً جانباً ؟

- a)  $y = -3x^2$     b)  $y = 2x^2 + 4$   
c)  $y = x^2 - 4$     d)  $y = 3x^2 - 4$

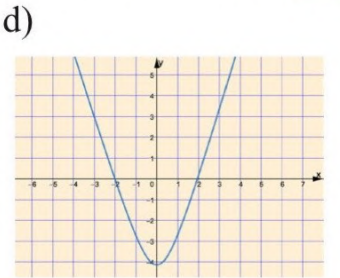
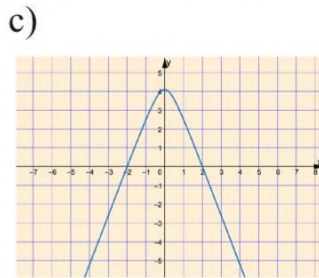
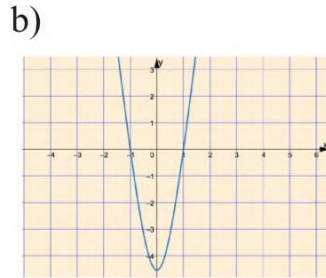
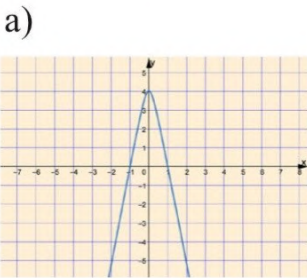


3 أي المعادلات التالية تعبر عن المعادلة المتمثلة بيانياً جانباً ؟

- a)  $y = 3x + 4$     b)  $y = 4x + 3$   
c)  $y = -3x + 4$     d)  $y = 3x - 4$

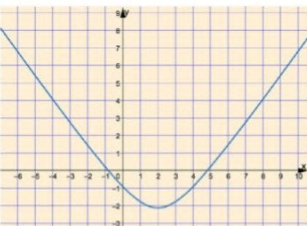
4 أي المعادلات التالية تعبر عن معادلة خطية ؟

- a)  $y = x^2 + 1$     b)  $y^2 = x + 1$     c)  $y^2 = x^2 + 1$     d)  $y = x + 1$

5 أي التمثيلات البيانية تعبر عن المعادلة:  $y = -x^2 + 4$  ؟

6 لتمثيل المعادلة غير الخطية نحتاج الى :

- a) نقطة واحدة على الاقل    b) نقطتان على الاكثر    c) نقطتان فقط    d) ثلاث نقاط على الاقل



7 ما احداثيا رأس المنحني الممثل جانباً ؟

- a) (2, -1)    b) (1, 2)    c) (2, -2)    d) (0, 2)

## Slop of the Line

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 أي ميل يعبر عن ميل المستقيم المار بالنقطتين:  $(-1, 3), (5, -2)$ 

- a)  $\frac{5}{6}$       b)  $-\frac{6}{5}$       c)  $-\frac{5}{6}$       d)  $\frac{6}{5}$

2 المستقيم الموازي لمحور الصادات يكون ميله:

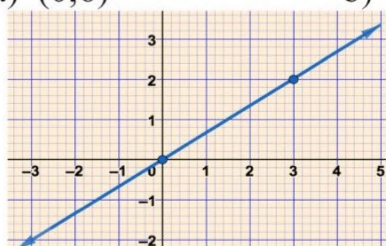
- a) صفراً      b) غير معرف      c) سالب      d) موجب

3 المقطع الصادي للمستقيم الذي معادلته  $3x - 5y = 15$  هو:

- a) -5      b) 3      c) 5      d) -3

4 نقطة تقاطع المستقيم الذي معادلته  $x + y = 6$  مع محور السينات هي:

- a)  $(0, 6)$       b)  $(-6, 0)$       c)  $(6, 0)$       d)  $(0, 0)$



5 أي المستقيمات التالية تعبر عن المستقيم الممثل جانباً؟

- a)  $2x - 3y = 0$       b)  $3y + 2x = 0$       c)  $3y - 2x = 0$       d)  $2x + 3y = 0$

6 المستقيم الموازي لمحور السينات يكون ميله:

- a) صفراً      b) غير معرف      c) سالب      d) موجب

7 ما ميل المستقيم  $3x - 2y = -6$  ؟

- a)  $-\frac{3}{2}$       b)  $-\frac{2}{3}$       c) 3      d)  $\frac{3}{2}$

8 ميل المستقيم المار بالنقطتين  $(8, -3), (5, -3)$  ؟

- a) موجب      b) سالب      c) صفر      d) غير معرف



## The Equation of the Line

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 معادلة المستقيم المار بالنقطتين  $(-2, -3)$ ,  $(-1, -7)$  هي:

- a)  $y - 4x = -11$       b)  $y - 4x = 11$       c)  $4y + x = -11$       d)  $y + 4x = -11$

2 المستقيم الذي معادلته  $y + x = 0$  ، ميله واحد نقطه هما:

- a)  $m = -1, (4,4)$       b)  $m = 1, (4,4)$       c)  $m = -1, (4,-4)$       d)  $m = 1, (-4,-4)$

3 استعمل معادلة المستقيم  $y = mx + k$  وجد قيمة  $k, m$  للمستقيم  $7y - 3x = 21$ :

- a)  $m = \frac{3}{7}, k = -3$       b)  $m = \frac{7}{3}, k = 3$       c)  $m = \frac{3}{7}, k = -3$       d)  $m = \frac{3}{7}, k = 3$

4 اي النقط التالية تقع على المستقيم الذي معادلته:  $y + 4x = 0$ 

- a)  $(1,4)$       b)  $(4,-1)$       c)  $(4,1)$       d)  $(1,-4)$

5 معادلة المستقيم الذي ميله  $(-1)$  ومقطعه الصادي يساوي  $(-2)$  هو:

- a)  $y + x - 2 = 0$       b)  $y + x + 2 = 0$       c)  $y + x - 2 = 0$       d)  $y - x - 2 = 0$

6 ما هي على صورة الميل - التقاطع معادلة المستقيم المار بالنقطتين  $(-1, -2)$ ,  $(1, 6)$ 

- a)  $y = -3x + 6$       b)  $y = 4x - 2$       c)  $y = 4x + 2$       d)  $y = 2x + 4$

7 ثمن وجبة طعام في احد المطاعم 25 الف دينار، مضافاً اليها 3 الاف دينار لكل نوع اضافي من المقبلات، اي المعادلات تمثل ثمن وجبة طعام مع  $(x)$  من المقبلات؟

- a)  $y = 25x + 3$       b)  $y = 25x - 3$       c)  $y = 3x + 25$       d)  $y = 3x - 25$

Trigonometric ratios



a)  $\frac{AB}{AC}$

b)  $\frac{BC}{AB}$

c)  $\frac{BC}{AC}$

d)  $\frac{AB}{AC}$

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 من الشكل المجاور النسبة المثلثية  $\sin \theta$  تكتب:

2 ABC مثلث قائم الزاوية في B، إذا كانت  $\cos A = \frac{3}{5}$  فإن  $\tan C$  يساوي:

a)  $\frac{4}{5}$

b)  $\frac{5}{4}$

c)  $\frac{4}{3}$

d)  $\frac{3}{4}$

3 إذا كانت  $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$  فإن قيمة الزاوية  $\theta$  يساوي:

a)  $45^\circ$

b)  $60^\circ$

c)  $90^\circ$

d)  $30^\circ$

4 القيمة العددية للمقدار:  $\sin 30^\circ \cos 30^\circ$  تساوي:

a)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

b)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

d)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$

5 مقلوب النسبة  $\cos \theta$  هي:

a)  $\sin \theta$

b)  $\sec \theta$

c)  $\csc \theta$

d)  $\cot \theta$

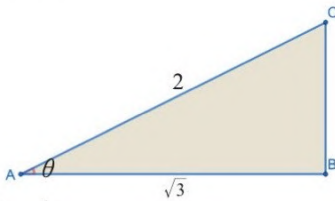
6 القيمة العددية للمقدار  $(\sec 60^\circ)^2 - (\tan 60^\circ)^2$  تساوي:

a) -1

b) 0

c) 2

d) 1



a) -1

b) 0

c) 2

d) 1

7 ABC مثلث قائم الزاوية في B كما في الشكل المجاور:

القيمة العددية للمقدار  $(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2$  يساوي:

8 إذا كانت  $\csc \theta = 2$  فإن قيمة الزاوية  $\theta$  هي:

a)  $45^\circ$

b)  $60^\circ$

c)  $90^\circ$

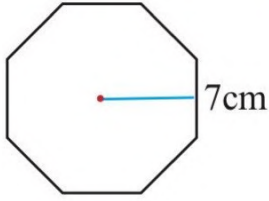
d)  $30^\circ$



الدرس [5-1] المضلعات والمجسمات (الهرم والمخروط)

Polygons and Polyhedrons (Pyramid and Cone)

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:



1 محيط الثماني المنتظم المجاور؟

- a) 45.5 cm      b) 48 cm      c) 38.3 cm      d) 56 cm

2 محيط مربع مساحته  $225\text{m}^2$  هو:

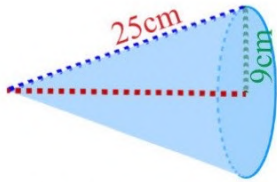
- a) 25m      b) 20 m      c) 15 m      d) 60 m

3 محيط خماسي منتظم طول عامده 3m ونصف قطر دائرته 5m هو:

- a) 16.2 m      b) 40 m      c) 16 m      d) 10.49 m

4 مساحة سباعي منتظم طول عامده 6cm وطول ضلعه 7.5cm هو:

- a)  $157.5\text{ cm}^2$       b)  $28.5\text{ cm}^2$       c)  $28\text{ m}^2$       d)  $9975\text{ m}^2$



5 المساحة الجانبية للمخروط في الشكل المجاور هو:

- a)  $360\pi\text{ cm}^2$       b)  $450\pi\text{ cm}^2$       c)  $369\pi\text{ cm}^2$       d)  $1640\pi\text{ cm}^2$

6 حجم هرم قاعدته مربعة طول كل ضلع 18cm وارتفاعه 20cm .

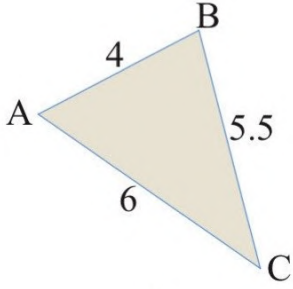
- a)  $2160\text{ cm}^3$       b)  $120\text{ cm}^3$       c)  $260\text{ cm}^3$       d)  $134\text{ cm}^3$

7 المساحة الكلية لمخروط مساحته قاعدته  $25\pi\text{ cm}^2$  وارتفاعه الجانبي 12cm هو:

- a)  $108\pi\text{ cm}^2$       b)  $27\pi\text{ cm}^2$       c)  $208\pi\text{ cm}^2$       d)  $85\pi\text{ cm}^2$

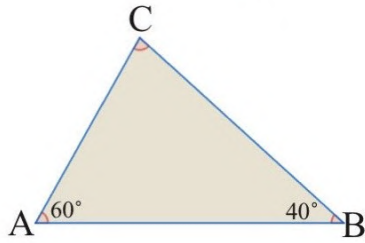
## Triangles

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:



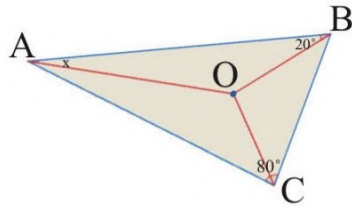
1 رتب الزوايا من الاصغر الى الاكبر في المثلث المجاور:

- a.  $m\angle C, m\angle A, m\angle B$
- b.  $m\angle A, m\angle B, m\angle C$
- c.  $m\angle B, m\angle C, m\angle A$
- d.  $m\angle C, m\angle B, m\angle A$



2 رتب الاضلاع من الاطول الى الاقصر في المثلث المجاور:

- a.  $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$
- b.  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$
- c.  $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AB}$
- d.  $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$



3 اذا كانت O هي نقطة التقاء منصفات زوايا المثلث ABC في الشكل المجاور فان قيمة x هي:

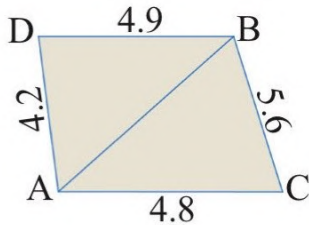
- a)  $20^\circ$
- b)  $40^\circ$
- c)  $30^\circ$
- d)  $50^\circ$

4 المثلث ABC فيه  $\overline{AD}, \overline{CE}$  قطعتان متوسطتان يلتقيان في نقطة O  $AD=36\text{cm}, CE=24\text{cm}$ ، فان قيمة  $OE$ ، علماً ان رأس المثلث هو النقطة B هي:

- a) 8 cm
- b) 24 cm
- c) 16 cm
- d) 12 cm

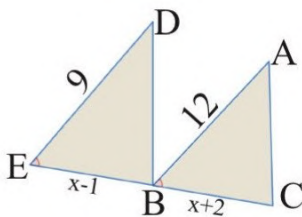
5 في السؤال (4) قيمة  $AO$  هي:

- a) 6 cm
- b) 12 cm
- c) 24 cm
- d) 14 cm



6 نسبة التشابه بين المثلثين  $ADB, ACB$  هي:

- a.  $\frac{8}{7}$
- b.  $\frac{7}{8}$
- c. 7
- d. 8



7 اذا كانت المثلثان  $DEB, ABC$  متشابهان وكانت الزاويتان  $m\angle ABC = m\angle DEB$

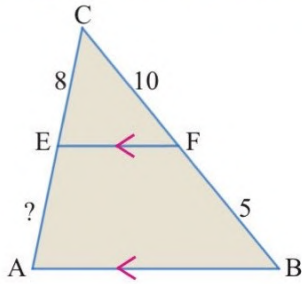
فان قيمة x هي:

- a) 8
- b) 12
- c) 10
- d) 6

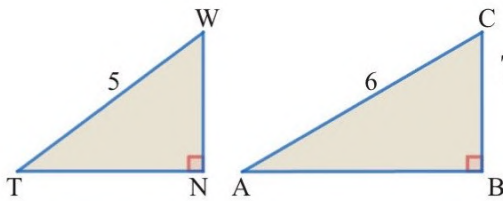


## Proportion and Measure in Triangles

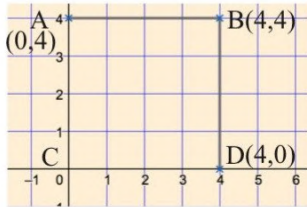
اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 إذا كان  $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$  فإن طول القطعة المستقيمة AE هو:

- a) 4                      b) 5                      c) 2                      d) 10

2 إذا كان  $\triangle TWN \sim \triangle ACB$ ، إذا علمت أن ارتفاع المثلث TWN هو (3)، فإن مساحة المثلث ABC هي:

- a)  $42.3 \text{ cm}^2$                       b)  $43.2 \text{ cm}^2$                       c)  $40.2 \text{ cm}$                       d)  $10.8 \text{ cm}^2$

تم رسم الصورة بعد تحويلها بتناسب هندسي نسبته  $\frac{4}{3}$  فتكون كما في الرسم المجاور:

اختر الإجابة الصحيحة للأسئلة من (3-6):

3 إحداثيات النقطة A قبل التحويل هي:

- a) (0,3)                      b) (3,0)                      c) (3,3)                      d) (0,0)

4 إحداثيات النقطة B قبل التحويل هي:

- a) (0,3)                      b) (3,0)                      c) (3,3)                      d) (0,0)

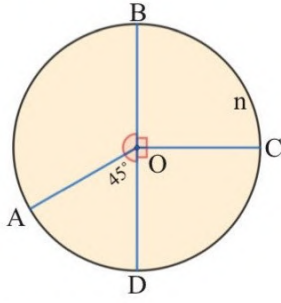
5 إحداثيات النقطة C قبل التحويل هي:

- a) (0,3)                      b) (3,0)                      c) (3,3)                      d) (0,0)

6 إحداثيات النقطة D قبل التحويل هي:

- a) (0,3)                      b) (3,0)                      c) (3,3)                      d) (0,0)

## The Circle



انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للسئلة (1-4):

1 قياس الزاوية  $\angle AOB$  هو:

- a)  $180^\circ$       b)  $135^\circ$       c)  $90^\circ$       d)  $45^\circ$

2 قياس القوس  $\widehat{AB}$  هو:

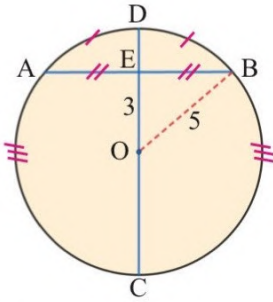
- a) 180      b) 90      c) 135      d) 45

3 قياس القوس  $\widehat{ABC}$  هو:

- a) 180      b) 90      c) 225      d) 135

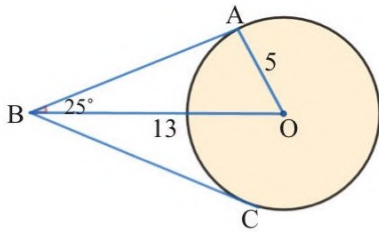
4 قياس القوس  $\widehat{BC}$  هو:

- a) 90      b) 42      c) 45      d) 135



5 طول الوتر AB في الشكل المجاور هو:

- a) 12      b) 10      c) 6      d) 8



انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للسئلة (6-7):

6 قياس  $\angle AOB$  هو:

- a)  $115^\circ$       b)  $120^\circ$       c)  $65^\circ$       d)  $90^\circ$

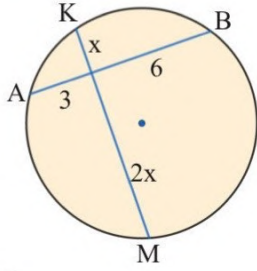
7 طول القطعة المستقيمة BC هو:

- a) 10      b) 14      c) 12      d) 5



## Triangle and Circle Line Segments and Circle

انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للأسئلة (1-2):

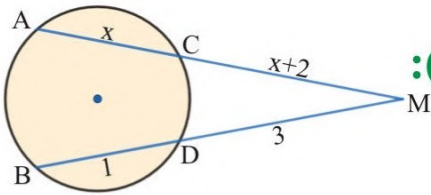


1 قيمة  $x$  هي:

- a) 2                      b) 6                      c) 9                      d) 3

2 طول الوتر  $\overline{MK}$  هو:

- a) 12                      b) 9                      c) 5                      d) 4



انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للأسئلة (3-5):

3 قيمة  $x$  هي:

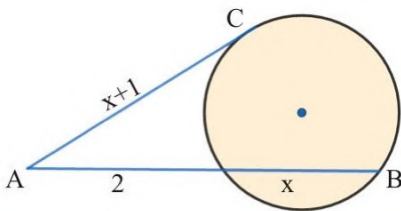
- a) 2                      b) 3                      c) 1                      d) 4

4 طول  $\overline{BM}$  هو:

- a) 4                      b) 6                      c) 5                      d) 2

5 طول  $\overline{AM}$  هو:

- a) 4                      b) 2                      c) 6                      d) 3



انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للأسئلة (6-8):

6 قيمة  $x$  هي:

- a) 1                      b)  $\sqrt{2}$                       c)  $\sqrt{3}$                       d) 0

7 طول المماس هو:

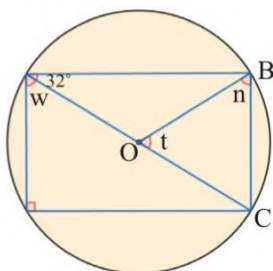
- a)  $\sqrt{2} + 1$                       b)  $\sqrt{3} + 1$                       c) 4                      d)  $\sqrt{5} + 1$

8 طول  $\overline{AB}$  هو:

- a)  $\sqrt{3} + 6$                       b)  $\sqrt{3} + 2$                       c)  $\sqrt{3} + 5$                       d)  $\sqrt{3} + 4$

## Angles and Circle

انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للأسئلة (1-3):



1 قياس الزاوية  $W$  هو:

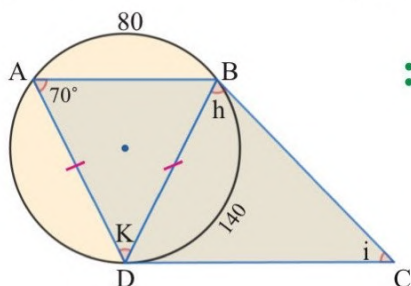
- a)  $45^\circ$                       b)  $58^\circ$                       c)  $90^\circ$                       d)  $32^\circ$

2 قياس الزاوية  $t$  هو:

- a)  $45^\circ$                       b)  $64^\circ$                       c)  $32^\circ$                       d)  $48^\circ$

3 قياس الزاوية  $n$  هو:

- a)  $45^\circ$                       b)  $64^\circ$                       c)  $32^\circ$                       d)  $58^\circ$



**انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للأسئلة (4-6):**

4 قياس الزاوية  $h$  هو:

- a)  $70^\circ$                       b)  $72^\circ$                       c)  $90^\circ$                       d)  $80^\circ$

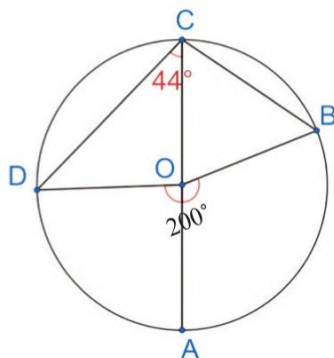
5 قياس الزاوية i هو:

- a)  $39^\circ$                       b)  $70^\circ$                       c)  $40^\circ$                       d)  $45^\circ$

6 قياس الزاوية  $k$  هو:

- a)  $70^\circ$                       b)  $30^\circ$                       c)  $40^\circ$                       d)  $78^\circ$

**انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للسؤال (7):**



7 قياس القوس  $\widehat{AB}$  هو:

- a) 56                      b) 112                      c) 65                      d) 82



## الدرس [6-1] تصميم دراسة مسحية وتحليل نتائجها

## Design a Survey Study and Analysis its Results

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 أي المقاييس هو الانسب للبيانات التالية:

8, 8, 12, 11, 15, 15, 16, 21, 23, 27, 31, 70.

- a) المدى                      b) المنوال                      c) الوسيط                      d) الوسط الحسابي

2 أي المقاييس هو الانسب للبيانات التالية:

2, 3, 4, 5, 6, 7.

- a) المدى                      b) المنوال                      c) الوسيط                      d) الوسط الحسابي

3 أي المقاييس هو الانسب للبيانات التالية:

18, 1, 3, 16, 23, 3, 2.

- a) المدى                      b) المنوال                      c) الوسيط                      d) الوسط الحسابي

4 المدى للبيانات الآتية: 24, 18, 32, 24, 22, 18 هو:

- a) 18                      b) 32                      c) 14                      d) 50

5 أي المقياس ليس من مقاييس النزعة المركزية؟

- a) المدى                      b) المنوال                      c) الوسيط                      d) الوسط الحسابي

6 القيمة المتطرفة لهذه البيانات: 4, 30, 3, 5, 5, 6, 5, 3

- a) 3                      b) 5                      c) 5                      d) 30

7 يكون الوسيط هو انسب مقاييس النزعة المركزية للبيانات التي:

- a) توجد قيم متطرفة                      b) لا توجد قيم متطرفة                      c) توجد قيم متطرفة                      d) لا توجد قيم متطرفة  
توجد فجوات كبيرة وسطها                      لا توجد فجوات كبيرة وسطها                      لا توجد فجوات كبيرة وسطها                      لا توجد فجوات كبيرة وسطها

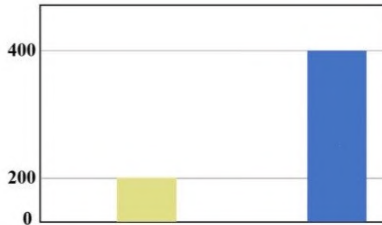
## الدرس [6-2] البيانات والاحصاءات المضللة

## Graphs and Misleading Statics

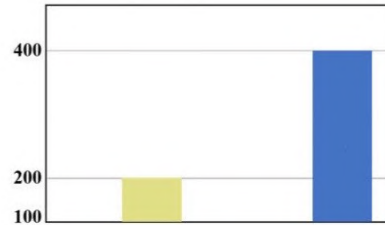
اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 اي رسم بياني هو الافضل في تمثيل بيانات معينة:

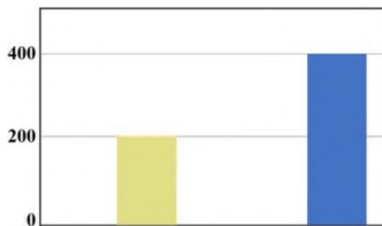
a)



b)



c)



d)



2 الرسم البياني يكون مضلل:

- a) يبدأ من الصفر والفترات غير متساوية  
 b) لا يبدأ من الصفر والفترات غير متساوية  
 c) لا يبدأ من الصفر والفترات متساوية  
 d) يبدأ من الصفر والفترات متساوية

3 في استطلاع شمل 6 مدرسين حول الدوام، افاد 4 منهم انهم يفضلون الدوام الصباحي. كتب المستطلع ان: (يفضل 2 مدرس من كل 3 مدرسين الدوام الصباحي) لماذا يعد هذا الاعلان مضللاً؟

- a) العينة كبيرة جداً  
 b) العينة تشمل ان يجب ان تشمل العينة عمال بناء  
 c) العينة صغيرة جداً  
 d) يفضل به (يفضل به 2 مدرس من كل 3 مدرسين)

4 في محل تجاري عرض نوع من الاجبان على 12 شخص لتقويمه قبل عرضه، ابدى 6 منهم اعجابهم بالمنتج، بناءً على ذلك صرح المنتج «ان المنتج جيد لان نسبة الذين فضلوه كانت 6 الى 3».

- a) البيانات غير مضللة لان نسبة 6 الى 3 نسبة كبيرة  
 b) البيانات غير مضللة لان نسبة الذين اعجبوا بالجبنه ضعف عدد الباقين  
 c) البيانات مضللة رغم ان عدد الذين اعجبوا بالجبنه ضعف عدد الباقين  
 d) البيانات مضللة لان العينة التي اختيرت متوسطة الحجم



## الدرس [6-3] الاحتمال والتجربي والاحتمال والنظري

## Experimental Probability and Theoretical Probability

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 إذا كان  $E_1, E_2$  حدثين متنافيين فإن  $P(E_1 \text{ or } E_2)$  تساوي:

- a)  $P(E_1) - P(E_2)$       b)  $P(E_1) \times P(E_2)$       c)  $P(E_1) + P(E_2)$       d)  $\frac{P(E_1)}{P(E_2)}$

2 سجل احمد 20 اصابة للهدف من 25 محاولة، أي نسبة مئوية للاحتمال التجريبي ان يسجل احمد الهدف في المحاولة التالية؟

- a) 50%      b) 60%      c) 70%      d) 80%



3 اطلقت تمارة مؤشر القرص المقابل مرة واحدة، أي نسبة مئوية للاحتمال النظري ان يدل المؤشر على اللون الابيض.

- a) 35%      b) 30%      c) 12.5%      d) 20%

4 عند رمي حجرى النرد مرة واحدة، احتمال الحصول على عددين مجموعهما 3 او حاصل ضربهما 3 هو:

- a)  $\frac{1}{3}$       b)  $\frac{1}{9}$       c)  $\frac{2}{3}$       d) 1

5  $E_1, E_2$  حدثان متنافيان، اذا كان  $P(E_1 \text{ or } E_2) = \frac{5}{6}$  وان  $P(E_2) = \frac{2}{3}$  فإن  $P(E_1)$  يساوي:

- a)  $\frac{1}{3}$       b)  $\frac{1}{6}$       c)  $\frac{1}{4}$       d)  $\frac{1}{5}$

6 عند رمي حجرى النرد، احتمال الحصول على عددين مجموعهما 13 هو:

- a) 3      b) 2      c) 1      d) 0

## Compound Events

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1  $E_1, E_2$  حدثان مستقلان، حيث  $P(E_1) = 0.3$  وان  $P(E_2) = 0.9$  فان احتمال حدوث  $E_1, E_2$  معاً هو:

- a) 1.2      b) 0.6      c) 0.27      d) 0.3

2 رمى مصطفى حجر نرد وقطعة نقود، احتمال ظهور رقم اكبر من 5 على حجر النرد والكتابة على قطعة النقود هو:

- a)  $\frac{2}{3}$       b)  $\frac{1}{3}$       c)  $\frac{1}{12}$       d) 3

3 صندوق فيه 5 كرات حمراء، 4 كرات خضراء.

$E_1$ : سحب كرة حمراء،  $E_2$ : سحب كرة خضراء من دون اعادة الحمراء. فان احتمال حدوثهما معاً هو:

- a)  $\frac{10}{9}$       b)  $\frac{5}{18}$       c)  $\frac{19}{18}$       d)  $\frac{1}{18}$

4  $E_1, E_2$  حدثان مترابطان فان احتمال وقوعهما معاً هو:

- a)  $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) + P(E_2 \text{ after } E_1)$       b)  $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) + P(E_2 \text{ before } E_1)$   
c)  $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2 \text{ after } E_1)$       d)  $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_1 \text{ after } E_2)$

5 العلاقة  $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$  بين الحدثان  $E_1, E_2$  حيث هما:

- a) لا توجد علاقة بينهما      b) مستقلان      c) مترابطان      d) غير ذلك

6  $E_1, E_2$  حدثان متنافيان حيث:  $P(E_1) = 0.15$ ,  $P(E_2) = 0.45$ ، فان احتمال حدوث  $E_1$  او  $E_2$  هو:

- a) 0.0675      b) 3      c) 0.6      d) 0.3



# المحتوى

## الفصل الأول : العلاقات والمتباينات في الأعداد الحقيقية

|    |                                                 |
|----|-------------------------------------------------|
| 5  | الاختبار القبلي                                 |
| 6  | الدرس الأول: ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية |
| 10 | الدرس الثاني: التطبيقات                         |
| 14 | الدرس الثالث: المتباينات المركبة                |
| 18 | الدرس الرابع: متباينات القيمة المطلقة           |
| 22 | اختبار الفصل                                    |

## الفصل الثاني : المقادير الجبرية

|    |                                                                           |
|----|---------------------------------------------------------------------------|
| 24 | الاختبار القبلي                                                           |
| 25 | الدرس الأول: ضرب المقادير الجبرية                                         |
| 29 | الدرس الثاني: تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر         |
| 33 | الدرس الثالث: تحليل المقدار الجبري بالمتطابقات                            |
| 37 | الدرس الرابع: تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة                 |
| 41 | الدرس الخامس: تحليل المقادير الجبرية مجموع مكعبين أو الفرق بين مكعبين ... |
| 45 | الدرس السادس: تبسيط المقادير الجبرية النسبية                              |
| 49 | اختبار الفصل                                                              |

## الفصل الثالث : المعادلات

|    |                                                     |
|----|-----------------------------------------------------|
| 51 | الاختبار القبلي                                     |
| 52 | الدرس الأول: حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين    |
| 56 | الدرس الثاني: حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد    |
| 60 | الدرس الثالث: حل المعادلات التربيعية بالتجربة       |
| 64 | الدرس الرابع: حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل |
| 68 | الدرس الخامس: حل المعادلات بالقانون العام           |
| 72 | الدرس السادس: حل المعادلات الكسرية                  |
| 76 | الدرس السابع: خطة حل المسألة (كتابة معادلة)         |
| 78 | اختبار الفصل                                        |

## الفصل الرابع : الهندسة الاحداثية

|                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------|----|
| الاختبار القبلي .....                                            | 80 |
| الدرس الأول: التمثيل البياني للمعادلات في المستوي الاحداثي ..... | 81 |
| الدرس الثاني: ميل المستقيم .....                                 | 85 |
| الدرس الثالث: معادلة المستقيم .....                              | 89 |
| الدرس الرابع: النسب المثلثية .....                               | 93 |
| اختبار الفصل .....                                               | 97 |

## الفصل الخامس : الهندسة والقياس

|                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------|-----|
| الاختبار القبلي .....                                         | 99  |
| الدرس الأول: المضلعات والمجسمات (الهرم والمخروط) .....        | 100 |
| الدرس الثاني: المثلثات .....                                  | 104 |
| الدرس الثالث: التناسب والقياس في المثلثات .....               | 108 |
| الدرس الرابع: الدائرة .....                                   | 112 |
| الدرس الخامس: المثلث والدائرة، القطع المستقيمة والدائرة ..... | 116 |
| الدرس السادس: الزوايا والدائرة .....                          | 120 |
| اختبار الفصل .....                                            | 124 |

## الفصل السادس : الاحصاء والاحتمالات

|                                                        |     |
|--------------------------------------------------------|-----|
| الاختبار القبلي .....                                  | 126 |
| الدرس الأول: تصميم دراسة مسحية وتحليل نتائجها .....    | 127 |
| الدرس الثاني: البيانات والاحصاءات المضللة .....        | 131 |
| الدرس الثالث: الاحتمال التجريبي والاحتمال النظري ..... | 135 |
| الدرس الرابع: الاحداث المركبة .....                    | 139 |
| اختبار الفصل .....                                     | 143 |
| تمارينات الفصول - الاختيار من متعدد .....              | 144 |